

بررسی پاسخ دینامیکی پل تحت جرم متحرک

هدی خادم زاده

دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه علم و صنعت ایران
h_khademzadeh@yahoo.com

رضا عباس نیا

دانشیار، دانشگاه علم و صنعت ایران
abbasnia@iust.ac.ir

اکبر میرزایی

دانشجوی دکتری، دانشگاه علم و صنعت ایران
mirzaee_akbar@yahoo.com

مهديه اسمعيل زاده

دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه علم و صنعت ایران
mahdie.e_civil@yahoo.com

کلید واژه‌ها: پاسخ دینامیکی، اصول المان محدود، سرعت بحرانی، روش تفاضل مرکزی، سیستم اندرکنش

چکیده

تحلیل و بررسی پاسخ دینامیکی پل تحت عبور وسیله نقلیه، موضوعی است که به دلیل افزایش ساخت و ساز و بهره برداری وسایل نقلیه سنگین و ارتعاش پل‌ها ناشی از عبور آن‌ها، در برنامه‌های کاربردی مهندسی عمران، حائز اهمیت می‌باشد. اثرات اینرسی وسیله نقلیه در تحلیل سازه‌ها تحت عبور بارهای متحرک با سرعت بالا و در مواردی که وزن بار نسبت به وزن پل قابل توجه است، قابل چشم‌پوشی نمی‌باشد. اثرات اینرسی در دینامیک پل‌ها، طراحی ریل‌های راه آهن، طراحی عرشه کشتی‌ها کاربرد گسترده‌ای دارد. با استفاده از مبانی علم دینامیک سازه و اصول المان محدود می‌توان معادلات حاکم بر سیستم پل-وسیله نقلیه را استخراج نموده و پاسخ سیستم را توسط روش‌های مختلف مانند روش‌های عددی محاسبه نمود.

در این مقاله جهت مدل‌سازی اثر اینرسی وسیله نقلیه متحرک از دو مدل‌سازی دقیق و تقریبی استفاده گردیده است. پاسخ دینامیکی پل یک دهانه با تکیه‌گاه دو سر ساده تحت عبور دو مدل‌سازی جرم متحرک با سرعت ثابت با استفاده از روش عددی تفاضل مرکزی محاسبه شده است. مقدار خطای پاسخ پل تحت مدل تقریبی نسبت به مدل دقیق جرم متحرک در نسبت سرعت و نسبت جرم‌های مختلف بررسی شده است و نمودار پاسخ دینامیکی پل تحت دو مدل‌سازی نمایش داده شده است. نتایج نشان می‌دهد که مدل‌سازی دقیق دارای دقت مناسبی بوده و روش تقریبی در محدوده‌ای از نسبت سرعت و نسبت جرم نسبت به روش دقیق دارای خطای محسوسی می‌باشد. همچنین با بررسی اثر نسبت سرعت وسیله نقلیه متحرک به سرعت بحرانی بر روی پاسخ تیر نتیجه می‌گردد که به طور تقریبی زمانی که سرعت وسیله نقلیه بیش از ۰.۵ برابر سرعت بحرانی می‌گردد پاسخ دینامیکی به مقدار ماکزیمم خود می‌رسد.

مقدمه

باتوجه به اهمیت ارزیابی رفتار اندرکنش وسایل نقلیه پرسرعت و سنگین هنگام عبور از پل‌ها، بررسی پاسخ دینامیکی پل‌ها به دلیل اینکه مرتباً تحت اثر ارتعاش ناشی از بارهای بهره‌بردار قرار دارند، حائز اهمیت می‌باشد. پل‌ها به عنوان عناصر کلیدی شبکه راه‌های یک کشور نقش منحصر به فردی را به لحاظ اقتصادی و سیاسی ایفا می‌کنند و تأمین ایمنی و پایداری آن‌ها، از اهمیت بالایی برخوردار است. (Gopalakrishnam et al., 2011)



ساده ترین مساله ارتعاشات در تیر ساده تحت اثر عبور یک بار ثابت و با سرعت ثابت می باشد. مطالعات اولیه بر روی این موضوع بیشتر برارائه راه حل هادرفرم بسته متمرکز شد. تحقیقات نخست در زمینه پاسخ دینامیکی پل ها تحت بارهای در حال حرکت با ریزش پل راه آهن چستر در انگلستان در اواسط قرن ۱۹ توسعه یافت. تحقیقات اولیه از بارهای در حال حرکت توسط ویلیس (۱۸۴۹) و استوکس (۱۸۴۹) انجام شد که اثر اینرسی بار در مدل آن ها لحاظ نشده بود. (Gonzalez, 2010)

Mazurek & Dewolf مطالعات تئوری و آزمایشگاهی بر روی تیرهای دو دهانه تحت اثر بار متحرک به منظور بررسی زوال سازه با تحلیل خصوصیات ارتعاشی انجام داده اند ولی اثر اینرسی ناشی از جرم متحرک در معادلات لحاظ نگردیده بود. (Mirzaee et al., 2014)

Jeefcot در سال ۱۹۲۹ برای اولین بار اثر اینرسی تیر و جرم متحرک را در نظر گرفت و برای حل معادله از یک روش تکرار شونده استفاده کرد. Fryba در سال ۱۹۷۳ تحقیق کاملی روی تیر با تکیه گاه ساده تحت بارگذاری های مختلف انجام داده است. (Eftekhar Azam et al., 2013)

مفید و آکین در سال ۱۹۸۹ روش حل عددی برای دریافت پاسخ تیر ساده تحت جرم متحرک ارائه دادند ولی اثر میرایی و سختی آن را در نظر نگرفتند. (Akin and Mofid 1989)

یاوری، نوری و مفید در سال ۲۰۰۱ با استفاده از روش پاسخ المان مجزا پاسخ تیر تیموشینکو را تحت اثر جرم متحرک بررسی کردند. اثرات ضخامت تیر و سرعت جرم متحرک بر پاسخ دینامیکی تیر نیز در این پژوهش بررسی گردیده است. (Yavari et al., 2002)

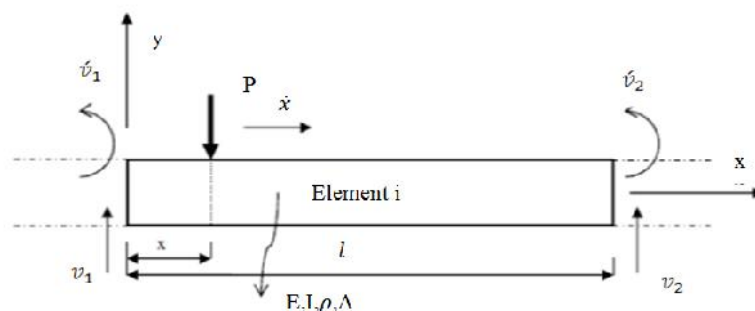
در این مقاله پاسخ دینامیکی پل تحت جرم متحرک محاسبه گردیده است. جهت مدل سازی اثر اینرسی وسیله نقلیه متحرک از دو مدل سازی دقیق و تقریبی استفاده شده است. در حالت مدل سازی دقیق اثر اینرسی همراه با وسیله نقلیه در نظر گرفته شده و در مدل سازی تقریبی اثر اینرسی در هر گام زمانی در وسط مسیر پیموده شده توسط وسیله نقلیه قرار داده شده است. در نتیجه به دلیل تغییر موقعیت جرم، ماتریس جرم سیستم همانند بردار نیرو با عبور وسیله ی نقلیه در طول پل تغییر یافته و در هر گام زمانی به روز رسانی گردیده است. با استفاده از روش های عددی می توان پاسخ سیستم را محاسبه نمود. در روش های عددی ابتدا توسط اصول المان محدود اجزای معادله حرکت یعنی ماتریس جرم، سختی، میرایی و نیرو به صورت جداگانه تشکیل می گردد، سپس با استفاده از روش انتگرال گیری مستقیم می توان پاسخ سیستم را به صورت تقریبی محاسبه کرد. در این پژوهش جهت محاسبه پاسخ دینامیکی پل از روش تفاضل مرکزی استفاده شده است.

هدف از این مقاله بررسی مقایسه ای بین پاسخ دینامیکی پل یک دهانه با تکیه گاه دو سر ساده تحت عبور مدل دقیق و تقریبی جرم متحرک با سرعت ثابت می باشد. همچنین اثر نسبت سرعت وسیله نقلیه به سرعت بحرانی و نسبت جرم وسیله نقلیه به جرم پل، بر روی پاسخ پل و میزان خطای مدل سازی تقریبی نسبت به مدل سازی دقیق بررسی شده است.

تشکیل معادلات حرکت در مدل دقیق جرم متحرک

در این بخش با استفاده از اصول المان محدود معادله ی حرکت سیستم پل-وسیله نقلیه را تشکیل داده و سپس پاسخ دینامیکی پل توسط روش تفاضل مرکزی محاسبه می گردد. برای مدل سازی وسیله ی نقلیه از حالت جرم متحرک استفاده می شود، اثر وزن وسیله ی نقلیه در ماتریس نیرو و اثر اینرسی آن در ماتریس جرم سیستم لحاظ می گردد که سبب وابسته بودن این دو ماتریس به زمان می گردد و با تغییر موقعیت جرم به روز رسانی می گردند.

یک المان تیر مستقیم با سطح مقطع ثابت در شکل زیر نشان داده شده است. می توان از تئوری اویلر-برنولی به منظور تعیین ماتریس های سختی و جرم این المان استفاده نمود. دو درجه آزادی برای هر گره شامل جابجایی در راستای محور y (V_1, V_2) و دوران حول محور z (ψ_1, ψ_2) را می توان به عنوان درجات آزادی این المان لحاظ نمود.



شکل ۱: جرم متحرک روی المان تیر

¹ Central difference

یک تابع درجه ۳، $v(x,t)$ برای جابجایی عرضی این المان فرض شده است به شکل زیر:

$$v(x,t) = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2 + a_3(t)x^3 \quad (1)$$

حالتی را در نظر بگیرید که بار متغیر با زمان $p(t)$ در طول تیر حرکت می‌نماید. معادله دیفرانسیل زیر توصیف‌کننده مساله فوق می‌باشد:

$$EI \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + \gamma \mu \omega_b \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = \delta(x-ct) m \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \quad (2)$$

به ترتیب مدول الاستیسته، ممان اینرسی، جرم واحد طول و فرکانس طبیعی تیر می‌باشد. پس از اعمال شرایط اولیه و شرایط مرزی و پس از حل معادله توسط تبدیل انتگرالی فوریه به معادله زیر تبدیل می‌گردد.

$$\ddot{V}(j,t) + \gamma \omega_b \dot{V}(j,t) + \omega_{(j)}^2 V(j,t) = \frac{p(t)}{\mu} \sin j \omega t \quad (3)$$

با استفاده از اصول المان محدود، تحت بارگذاری جرم متحرک معادله حرکت سیستم به صورت معادله زیر می‌باشد.

$$[M+Mv]\{\ddot{v}\} + [C]\{\dot{v}\} + [K]\{v\} = \{p(t)\} \quad (4)$$

$[M]$ و $[K]$ به ترتیب ماتریس جرم و سختی هر المان می‌باشد که در روابط ۸ و ۹ داده شده است با اسمبل کردن ماتریس جرم و سختی المان‌ها، ماتریس جرم و سختی کل تیر محاسبه می‌گردد.

$$M = \frac{\rho A l}{12} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -12l \\ 22l & 4l^2 & 12l & -2l^2 \\ 54 & 12l & 156 & -22l \\ -12l & -2l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$K = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$[C]$ ماتریس میرایی المان می‌باشد که متناسب با جمع ماتریس سختی و جرم در هر المان به شکل زیر بیان می‌گردد:

$$[C] = a_0 [M] + a_1 [K] \quad (7)$$

اگر نسبت میرایی m و n متناظر با دو فرکانس ω_m و ω_n باشد، فاکتورهای میرایی رایله، a_0 و a_1 را می‌توان از حل معادلات زیر بدست آورد:

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \gamma \frac{\omega_m \omega_n}{\omega_n^2 - \omega_m^2} \begin{bmatrix} \omega_n & -\omega_m \\ -1 & 1 \\ \omega_n & \omega_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_m \\ \xi_n \end{Bmatrix} \quad (8)$$

به منظور به دست آوردن نیروی متناظر درجات آزادی هر گره می‌توان از توابع شکل المان تیر استفاده نمود:

$$N_1(x) = 1 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3 \quad (9)$$

$$N_2(x) = x - 2l\left(\frac{x}{l}\right)^2 + l\left(\frac{x}{l}\right)^3 \quad (10)$$

² Transverse displacement



$$\mathbf{N}_r(x) = \mathbf{r}\left(\frac{x}{L}\right)^T - \mathbf{r}\left(\frac{x}{L}\right)^T \quad (11)$$

$$\mathbf{N}_r(x) = -l\left(\frac{x}{L}\right)^T + l\left(\frac{x}{L}\right)^T \quad (12)$$

اگر بار به فاصله x از گره ابتدای المان i ام به طول L و بین دو گره j و $j+1$ قرار داشته باشد، خواهیم داشت:

$$\zeta = \frac{x}{L} \rightarrow \begin{cases} P_j(t) = N_1(\xi)P(t) \\ M_j(t) = N_r(\xi)P(t) \\ P_{j+1}(t) = N_r(\xi)P(t) \\ M_{j+1}(t) = N_\xi(\xi)P(t) \end{cases} \quad (13)$$

[Mv] ماتریس اثر اینرسی جرم وسیله نقلیه متحرک می باشد که مطابق بردار نیرو، باید در هر لحظه به روز رسانی شود. هنگامیکه جرم متحرک در طول تیر حرکت می کند، نیروی اینرسی هر گره با زمان تغییر می نماید. به منظور به دست آوردن نیروی اینرسی متناظر درجات آزادی هر گره می توان از توابع شکل المان تیر استفاده نمود. یعنی اگر بار به فاصله x از گره ابتدای المان i ام به طول l و بین دو گره j و $j+1$ قرار داشته باشد، خواهیم داشت:

$$\zeta = \frac{x}{l} \rightarrow \begin{cases} Mv_j = N_1(\xi)mv \\ Mv_{j+1} = N_r(\xi)mv \end{cases} \quad (14)$$

جرم mv وسیله نقلیه متحرک می باشد. مقدار [Mv] در مدل دقیق و تقریبی متفاوت می باشد. (Mirzaee et al., 2014)

تشکیل معادلات حرکت در مدل تقریبی جرم متحرک

در روش تقریبی ارائه شده توسط C.E.Inglis در خصوص تاثیر عبور وسیله متحرک در پل های با دهانه بلند، فرض بر این است که اثرات ثقلی بار مستقل از اثرات اینرسی آن می باشد. در محاسبات این روش فرض می شود که یک بار متحرک در طول تیر حرکت می کند (مشابه بخش گذشته) در حالیکه جرم وسیله نقلیه در یک نقطه ثابت x_0 عمل می کند. اثرات اینرسی جرم m از بار $P = mg$ و g شتاب ثقل است) بر روی تیر در نقطه x_0 اعمال می گردد. در این حالت اثرات اینرسی بار را به صورت معادله دیفرانسیل زیر می توان نوشت.

$$EI \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} + \gamma \mu \omega_b \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = -\delta(x - x_0) m \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \Big|_{x=x_0} \quad (15)$$

با اعمال تبدیل فوریه معادله (15) خواهیم داشت:

$$\frac{j^2 \pi^2}{L^2} EIV(j,t) + \mu \ddot{V}(j,t) + \gamma \mu \omega_b \dot{V}(j,t) = -\frac{\gamma m}{L} \dot{V}(j,t) \sin^2 \frac{j\pi x_0}{L}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \Big|_{x=x_0} = \frac{\gamma}{L} \dot{V}(j,t) \sin \frac{j\pi x_0}{L}.$$

بنابراین معادله (16) به فرم زیر بازنویسی می شود:

$$\ddot{V}(j,t) + \gamma \bar{\omega}_b \dot{V}(j,t) + \bar{\omega}_{(j)}^2 V(j,t) = 0 \quad (17)$$

که در آن:

$$\bar{\omega}_{(j)}^2 = \omega_{(j)}^2 \frac{\mu}{m}; \quad \bar{\omega}_{(j)}^2 = \bar{\omega}_{(j)}^2 - \bar{\omega}_b^2 \quad (18)$$

$$\bar{\omega}_b = \omega_b \frac{\mu}{\mu} \quad (19)$$

$$\bar{\mu} = \mu \left(1 + \frac{\gamma P}{G} \sin^2 \frac{j\pi x_1}{L} \right) \quad (20)$$

$$\bar{f}_{(j)} = f_{(j)} \left(1 + \frac{\gamma P}{G} \sin^2 \frac{j\pi x_1}{L} \right)^{-\gamma/2} \quad (21)$$

$$G = \mu L g - M \quad (22)$$

تنها مشکل این روش انتخاب x_1 است یعنی محلی که به صورت تقریبی جرم m در آن قرار گرفته است. فرکانس طبیعی پل با محل قرارگیری جرم m تغییر می کند. اما در نزدیکی مرکز تیر ساده این تغییرات اندک است به ویژه برای مقادیر اندک P/G لذا اغلب در استفاده از این روش جرم m در مرکز دهانه تیر قرار می گیرد، یعنی $x_1 = L/\gamma$ بنابراین معادلات (۲۰) و (۲۱) تقریباً به صورت زیر است. (Akin and Mofid, 1989)

$$\bar{\mu} = \mu \left(1 + \gamma P/G \right) \quad (23)$$

$$\bar{f}_{(j)} = f_{(j)} \left(1 + \gamma P/G \right)^{-\gamma/2} \quad (24)$$

پس از تشکیل معادلات حرکت در دو مدل فوق الذکر، می توان با استفاده از روش های عددی، پاسخ پل تحت عبور وسیله نقلیه را محاسبه نمود. دربخش بعد به معرفی روش حل عددی مورد استفاده در این مقاله پرداخته می شود. (ladislav, 1999)

روش تفاضل مرکزی

روش برون یابی صریح به صورت تفاضلی، شامل بیان تغییر مکان در لحظه t_{j+1} بر حسب تغییر مکان ها، سرعت ها و شتاب های قبلی است. مهمترین روش تفاضلی که بیشترین کاربرد را در حل مسائل حوزه زمان دارد روش تفاضل مرکزی است که از مقبولیت ویژه ای برخوردار است. مشتقات زمانی اول و دوم به روش تفاضل مرکزی به صورت ذیل بیان می گردد.

$$\{\dot{\mathbf{v}}\}_i = \frac{\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{v}_{i-1}}{\gamma \Delta t} \quad (25)$$

$$\{\ddot{\mathbf{v}}\}_i = \frac{\mathbf{v}_{i+1} - \gamma \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_{i-1}}{\Delta t^2} \quad (26)$$

باجایگزینی مشتق مرتبه اول و دوم زمانی در معادله (۴) و ساده سازی داریم:

$$\{\mathbf{p}_{\text{eff}}\}_{i+1} = \{\mathbf{p}\}_i - \left[\frac{\mathbf{M}}{\Delta t^2} - \frac{\mathbf{C}}{\gamma \Delta t} \right] \{\mathbf{v}\}_{i-1} - \left[\mathbf{K} - \frac{\gamma \mathbf{M}}{\Delta t^2} \right] \{\mathbf{v}\}_i \quad (27)$$

$$[\mathbf{K}_{\text{eff}}] \{\mathbf{v}\}_{i+1} = \{\mathbf{p}\}_{\text{eff}} \quad (28)$$

$$[\mathbf{K}_{\text{eff}}] = \frac{[\mathbf{M}]}{\Delta t^2} + \frac{[\mathbf{C}]}{\gamma \Delta t} \quad (29)$$

رابطه (۲۷) تحت عنوان پیش بین تفاضل مرکزی خوانده می شود. می توان به صورت تکراری \mathbf{v}_{i+1} را برای هر گام زمانی بدست آورد. برای بدست آوردن مقدار آغازین \mathbf{v}_{-1} از رابطه زیر محاسبه می گردد. (کشته گر و میری، ۱۳۸۸)

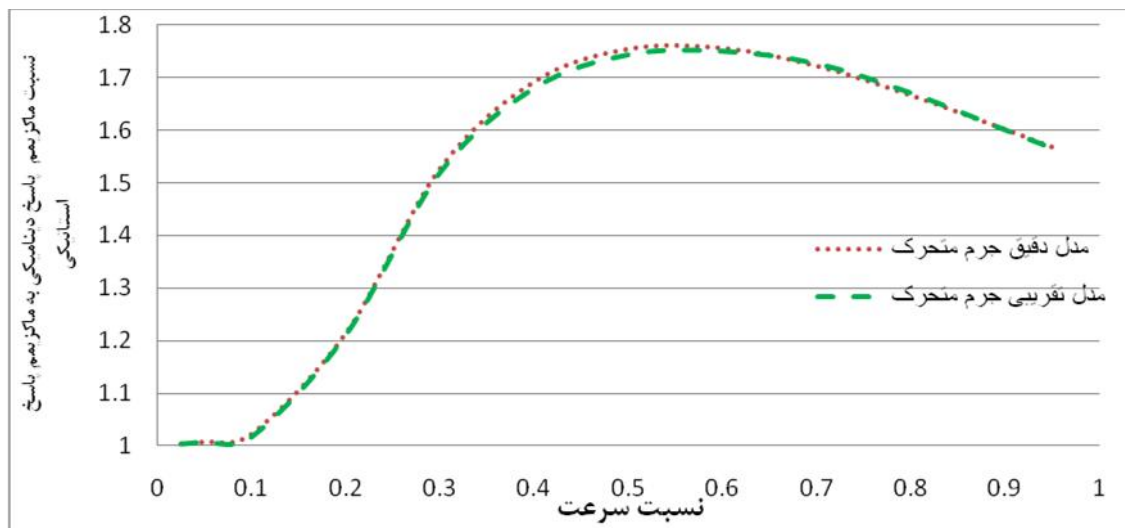
$$\{\mathbf{v}\}_{-1} = \{\mathbf{v}\}_0 - (\Delta t) \{\dot{\mathbf{v}}\}_0 + \left(\frac{\Delta t^2}{\gamma} \right) \{\ddot{\mathbf{v}}\}_0 \quad (30)$$

به منظور مطالعه مثال عددی یک تیر با تکیه گاه دو سر ساده به طول ۱۰ متر و میرایی ۵٪ مدل سازی شده است. مشخصات تیر مطابق جدول ۱ می باشد. تیر به ۴ و ۳۲ المان تقسیم بندی شده است. در این بخش نتایج حاصل از پاسخ دینامیکی تیر تحت دو مدل دقیق و تقریبی جرم متحرک باروش عددی تفاضل مرکزی با استفاده از نرم افزار MATLAB محاسبه و مقایسه شده است. همچنین میزان خطای مدل تقریبی نسبت به مدل دقیق در نسبت جرم (جرم وسیله نقلیه به جرم پل) و نسبت سرعت (سرعت وسیله نقلیه به سرعت بحرانی) مختلف محاسبه شده است و در یک کانتور ارائه می گردد.

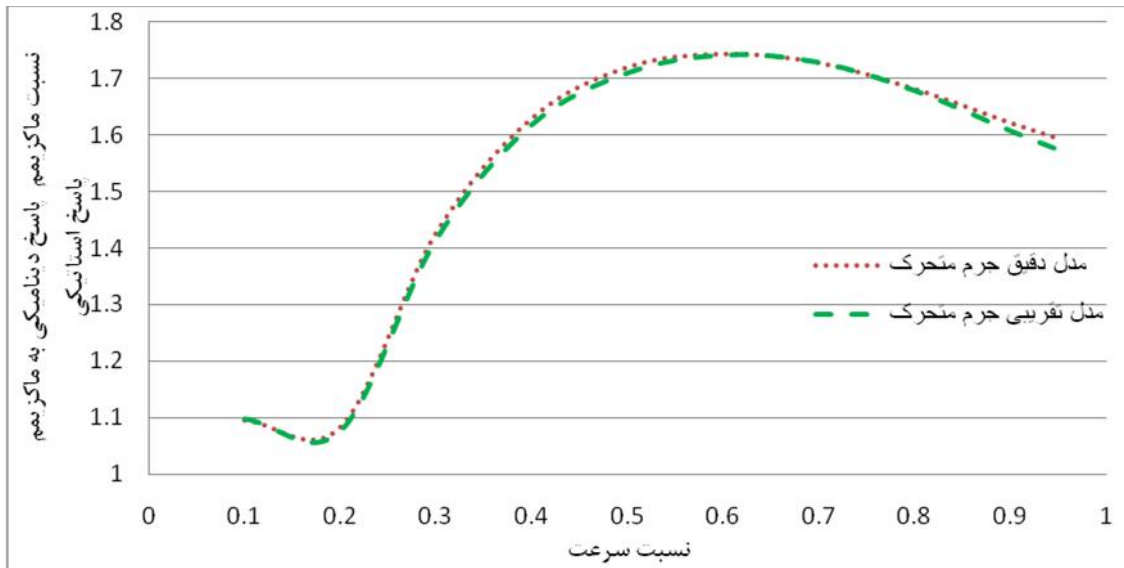
جدول ۱: مشخصات پارامترهای مدل

k	Lt(mm)	h(mm)	b(mm)	P(N)	(t/mm ³)	E(N/mm ²)	EL	Model
10	10000	200	200	1000	7.80E-09	2.00E+05	۴	۱
10	10000	200	200	1000	7.80E-09	2.00E+05	۳۲	۲

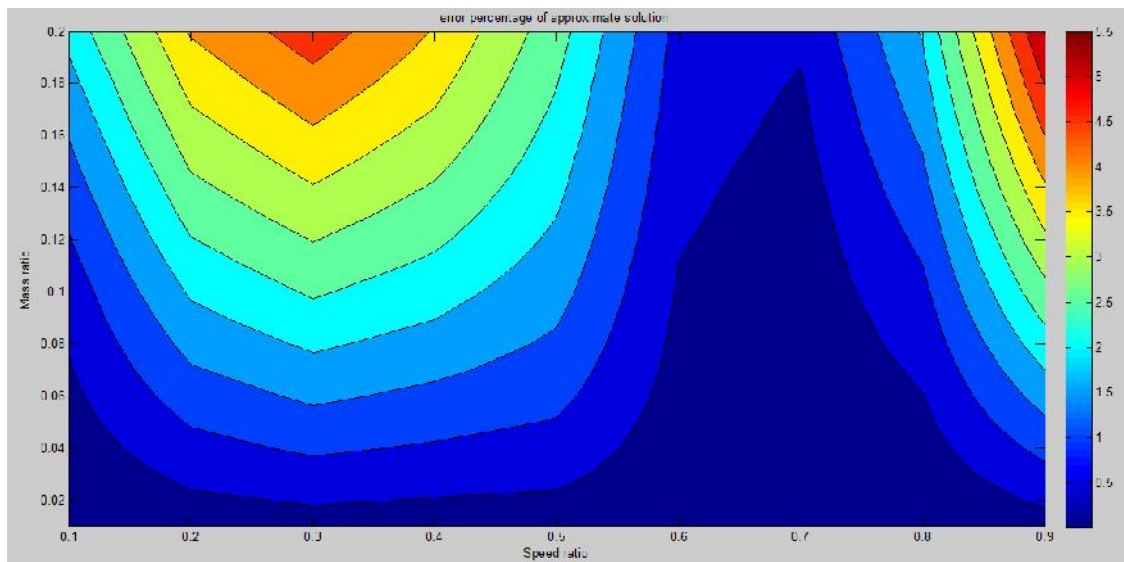
نمودار ماکزیمم پاسخ دینامیکی تیر نسبت به ماکزیمم پاسخ استاتیکی تحت سرعت والمان بندی های مختلف در شکل ۲ و ۳ نشان داده شده است که با مشاهده آن ها نتیجه می شود که در اکثر نسبت سرعت ها، پاسخ در حالت مدل دقیق بیشتر از مدل تقریبی می باشد. با افزایش تعداد المان مقدار خطای پاسخ پل تحت مدل تقریبی نسبت به مدل دقیق افزایش می یابد که نتیجه می شود هرچه تعداد المان بیشتر باشد، محاسبه پاسخ دقیق تر می گردد. همچنین با بررسی اثر نسبت سرعت وسیله نقلیه متحرک به سرعت بحرانی بر روی پاسخ تیر نتیجه می گردد که به طور تقریبی زمانی که سرعت وسیله نقلیه بیش از ۰.۵ برابر سرعت بحرانی می گردد پاسخ دینامیکی به مقدار ماکزیمم خود می رسد. در شکل ۴ کانتور میزان خطای مدل تقریبی نسبت به مدل دقیق جرم متحرک در نسبت جرم و نسبت سرعت های مختلف نمایش داده شده است. همان طور که مشاهده می گردد که با افزایش نسبت جرم به بیش از ۱۲٪ و یا در محدوده $0.4 < 0.2$ و نسبت سرعت های بیش از ۰.۸۵، میزان خطای مدل تقریبی نسبت به مدل به ماکزیمم مقدار خود می رسد. در نتیجه در خارج از محدوده عنوان شده و با توجه به دقت مطالعات مورد نظر می توان از مدل تقریبی نیز استفاده نمود.



شکل ۲: نمودار مقایسه نسبت پاسخ دینامیکی به استاتیکی در مدل های مختلف در ۴ المان



شکل ۳: نمودار مقایسه نسبت پاسخ دینامیکی به استاتیکی در مدل های مختلف در ۳۲ المان



شکل ۴: تغییرات درصد خطا مدل تقریبی نسبت به مدل دقیق در ۳۲ المان

نتیجه گیری

امروزه به دلیل توسعه و پیشرفت وسایل نقلیه سریع، ارتعاش سازه تحت عبور وسیله نقلیه متحرک در برنامه های کاربردی مهندسی عمران، حائز اهمیت می باشد. در این پژوهش از دو مدل سازی دقیق و تقریبی جرم متحرک جهت مدل سازی وسیله نقلیه استفاده گردیده و پاسخ پل تحت مدل های مطرح شده بررسی و مقایسه شده است. پاسخ دینامیکی پل تحت هردو مدل سازی توسط روش عددی تفاضل مرکزی محاسبه گردیده است. همچنین اثر نسبت سرعت و وسیله نقلیه به سرعت بحرانی و نسبت جرم و وسیله نقلیه به جرم پل، بر روی میزان خطا بررسی شده است. با بررسی پاسخ پل تحت جرم متحرک در حالت مدل سازی دقیق و تقریبی اینرسی، مشاهده گردیده است که:

۱. در اکثر موارد پاسخ تیر تحت سیستم جرم متحرک در حالت مدل سازی دقیق بیشتر از مدل سازی تقریبی است که نشان می دهد با در نظر گرفتن اثر اینرسی جرم متحرک به صورت دقیق، دقت در محاسبات افزایش می یابد.
۲. همچنین با بررسی اثر نسبت سرعت و وسیله نقلیه متحرک به سرعت بحرانی بر روی پاسخ تیر نتیجه می گردد که به طور تقریبی زمانی که سرعت وسیله نقلیه بیش از ۰.۵ برابر سرعت بحرانی می گردد پاسخ دینامیکی به مقدار ماکزیمم خود می رسد.
۳. همچنین در محدوده معینی از نسبت جرم و نسبت سرعت، با توجه به دقت مطالعات مورد نظر، مدل تقریبی دارای خطای قابل قبول بوده و می توان از این مدل نیز در محاسبات استفاده نمود.



کشته‌گر؛ بهروز، میری؛ محمود، "مقایسه روش های عددی در حل معادله دیفرانسیل حرکت: تئوری و کاربرد"، پردیس دانشگاه‌های فنی دانشگاه تهران، ۱۳۸۸.

Akin JE and Mofid M (1989) Numerical Solution for Response of beam with moving mass, *J.Struct.Eng*, 115(1)

EftekharaAzam S, Mofid M and Afghani R (2013) Dynamic response of Timoshenko beam under moving mass, *ScientiaIranicaA*,20(1),50–56

González (2010) Vehicle-Bridge Dynamic Interaction Using Finite Element Modelling

Gopalakrishnan S , Ruzzenet M and Hanagud S (2011) Computational Techniques for Structural *Health Monitoring*

Ladislav F (1999) Vibration of solids and structures under moving load (3 edn) ,Thomas Telford Ltd

Mirzaee A, Shayanfar M and Abbasnia R (2014) Damage detection of bridges using vibration data by adjoint variable method, Hindawi Publishing Corporation Shock and Vibration Volume, *Article ID* 698658

Yavari A, Nouri M and Mofid M (2002) Discrete element analysis of dynamic response of Timoshenko beams under moving mass'', *Advances in Engineering Software* ,33(3), pp.143–153