

## ارزیابی کارایی یک تکنیک تسریع محاسبات انتگرال گیری لرزه‌ای در اعمال به حرکت غیرهماهنگ پایه‌های پل

سهیل آزاد

دانشجوی کارشناسی ارشد، پژوهشگاه بین‌المللی زلزله‌شناسی و مهندسی زلزله، تهران، ایران  
s.azad@iiees.ac.ir

آرام سروشیان

عضو هیئت علمی، پژوهشگاه بین‌المللی زلزله‌شناسی و مهندسی زلزله، تهران، ایران  
a.soroushian@iiees.ac.ir

شاهرخ مالک

عضو هیئت علمی، دانشگاه تهران، تهران، ایران  
maalek@ut.ac.ir

کلید واژه‌ها: تحلیل لرزه‌ای، تاریخچه زمانی، پل، حرکت ناهماهنگ پایه‌ها، نگاشت جابجایی، هزینه محاسباتی

### چکیده

سالهست که در بسیاری از کشورها از پل‌های با دهانه بلند استفاده می‌شود. مطالعه رفتارهای لرزه‌ای و حتی الامکان غیرخطی این گونه پل‌ها، نیازمند تحلیل‌های تاریخچه زمانی از نوع انتگرال گیری مستقیم است. در موارد بسیاری، برای تحلیل صحیح، لحاظ کردن تحریک‌های چند تکیه گاهی نیز لازم است. با توجه به هزینه محاسباتی قابل توجه چنین تحلیل‌هایی، بررسی امکان کاهش این هزینه، توسط تکنیکی موفق و اخیراً پیشنهاد شده، هدف این مقاله است. پس از انجام بررسی‌های مختصر نظری، یک پل، و نگاشت‌هایی از نوع جابجایی برای اعمال در تکیه گاه‌های پل، انتخاب شده‌اند. سپس، با در نظر گرفتن اثرات تحریک‌های چند تکیه گاهی، تحلیل‌های خطی و غیرخطی، هر یک، یک بار با گام نگاشت زلزله، و بار دیگر با گام بزرگتر پیشنهاد شده در اعمال تکنیک انجام شده، نتایج از لحاظ دقت و هزینه محاسباتی مقایسه گردیده‌اند. به عنوان نتیجه، با اعمال تکنیک جدید اشاره شده در بالا، می‌توان در تحلیل پل‌های درگیر با حرکت ناهماهنگ پایه‌ها کاهش هزینه محاسباتی انتگرال گیری را به بهای کاهش اندک دقت انتظار داشت.

### مقدمه

برای بررسی رفتار دینامیکی سازه‌ها، معادله حاکم بر تعادل دینامیکی آنها باید تنظیم و حل گردد (Paultre, 2010) و (Chopra, 1995). پس از افراز در فضا طی روش‌هایی نظیر اجزای محدود و اجزای مرزی (Schafer 2006)، معادله حرکت به صورت مدل ریاضی زیر قابل نمایش است (Schafer, 2006) و (Argyris et al., 1977):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{f}_{\text{int}}(t) = \mathbf{f}(t) \quad 0 \leq t < t_{\text{end}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{u}(t = t_0) = \mathbf{u}_0 \\ \dot{\mathbf{u}}(t = t_0) = \dot{\mathbf{u}}_0 \\ \mathbf{f}_{\text{int}}(t = t_0) = \mathbf{f}_{\text{int}_0} \end{array} \right\} \text{شرایط اولیه} \quad (1)$$

$$\text{قیود:} \quad \mathbf{Q}$$



با توجه به درجات آزاد تعریف شده در مدل ریاضی، در رابطه (۱)،  $\mathbf{M}$  مؤید ماتریس جرم،  $\mathbf{u}$ ،  $\dot{\mathbf{u}}$  و  $\ddot{\mathbf{u}}$  به ترتیب، معرف بردارهای جابجایی (تغییر مکان)، سرعت، و شتاب،  $\mathbf{f}_{int}$  به معنای نیروهای داخلی،  $\mathbf{f}$  نشانه نیروی خارجی،  $\mathbf{Q}$  بیانگر شروط اضافی غیرخطی، به دلایلی چون برخورد، اصطکاک،  $t$  نشان‌دهنده زمان، و زیرنویس 0 در سمت راست یک متغیر نشان دهنده مقدار آن متغیر، در لحظه آغاز تحلیل است. برای حل معادله حرکت، روش‌های متفاوتی پیشنهاد شده اند. توانمندترین این روش‌ها، انتگرال‌گیری مستقیم است (Chung and Hulbert, 1994) و (Chopra, 1995). با توجه به اعمال تحریک در هر گام زمانی و مباحثی چون دقت و پایداری عددی که معمولاً برای تأمین همگرایی لازم است (Beytschko and Hughes, 1983)، پیشنهاد مورد قبول عمومی برای انتخاب اندازه گام‌های زمانی بصورت زیر است (Soroushian, 2008)، (Clough and Penzien, 1993)، و (Bathe, 1996):

$$\Delta t \cong \begin{cases} \text{Min} \left( \frac{T}{10}, h_s, f \Delta t \right) & \text{مسائل خطی} \\ \text{Min} \left( \frac{T}{100}, h_s, f \Delta t \right) & \text{مسائل غیرخطی} \end{cases} \quad (2)$$

در رابطه فوق،  $T$  بیانگر اندازه کوچکترین پریود نوسانی حائز اهمیت در پاسخ مورد مطالعه (با توجه به اینکه، قبل از تحلیل، مقدار  $T$  مشخص نیست، معمولاً، کوچکترین پریود نوسانی طبیعی در حالت خطی، به عنوان  $T$ ، در نظر گرفته می‌شود)،  $\frac{T}{10}$  و  $\frac{T}{100}$  معیارهای پیشنهاد شده برای تأمین دقت قابل قبول انتگرال‌گیری به ترتیب در مسائل خطی و غیرخطی،  $h_s$  بزرگترین اندازه گام زمانی تضمین‌کننده پایداری عددی و سازگاری در محاسبات انتگرال‌گیری مسائل خطی (Clough and Penzien, 1993) و (Bathe, 1996)، و  $f \Delta t$  نشان‌دهنده اندازه گام زمانی مشخص و ثابتی است، که  $\mathbf{f}(t)$  بر اساس آن ثبت شده است (Soroushian, 2008). در نتیجه اعمال تکنیک ارائه شده در سال ۲۰۰۸ (Soroushian, 2008)، رابطه (۲) به رابطه زیر:

$$\Delta t = n_f \Delta t \cong \begin{cases} \text{Min} \left( \frac{T}{10}, h_s \right) & \text{مسائل خطی} \\ \text{Min} \left( \frac{T}{100}, h_s \right) & \text{مسائل غیرخطی} \end{cases} \quad (3)$$

که در آن  $n$  بزرگترین مقدار مثبتی است که رابطه (۳) را ارضاء کند، تبدیل می‌شود؛ و درصد کاهش هزینه محاسباتی (برابر با درصد کاهش زمان محاسبات انتگرال‌گیری)،  $\mathbf{A}_c$ ، در تحلیل‌های خطی، مطابق رابطه زیر تأمین می‌گردد:

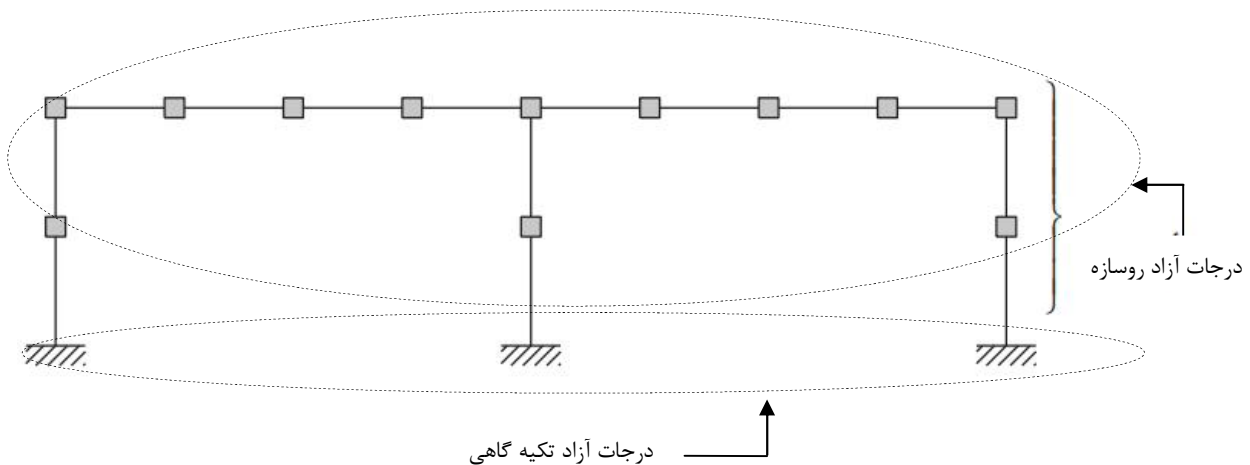
$$\mathbf{A}_c = \frac{n-1}{n} 100 \quad (\%) \quad (4)$$

در این مقاله، طی بحثی نظری و مطالعه ای عددی، امکان استفاده از تکنیک ارائه شده در سال ۲۰۰۸ (Soroushian, 2008)، برای کاهش هزینه محاسباتی تحلیل‌های لرزه ای پل‌های درگیر با حرکت ناهماهنگ پایه‌ها مورد بررسی قرار گرفته است.

## مطالعه نظری

در این بخش، هدف نیل به معادلات حاکم بر رفتار سازه‌های چند درجه آزاد تحت تأثیر حرکت ناهماهنگ تکیه‌گاه‌ها (به عنوان نمونه به پل چند دهانه نشان داده شده در شکل (۱) توجه شود)، ساده سازی معادلات بدست آمده، و مقایسه آنها با روابط حرکت مورد بحث در اعمال تکنیک پیشنهاد شده در (Soroushian, 2008) است. در شکل (۱)، تمام مولفه‌های پاسخ‌های گره‌های مربوط به گره‌های روسازه (گره‌های غیرتکیه‌گاهی) در بردار  $\mathbf{u}_g^t$  در نظر گرفته شده‌اند (بالانویس  $t$  به کل بودن متغیرها اشاره دارد). به همین ترتیب، مولفه‌های پاسخ‌های گره‌های تکیه‌گاهی نیز در برداری به نام  $\mathbf{u}_g$  بیان گردیده‌اند. (مولفه‌های اخیر می‌توانند بیانگر حرکت‌های ناهماهنگ گره‌های تکیه‌گاهی ناشی از زلزله باشند). در حالت خطی، معادله حرکت سیستم بر

حسب درجات آزاد فوق الذکر به شکل زیر خواهد بود (Yamamura 1990) و (Ghobarah et al., 1996):



شکل ۱: تعریف حالت عمومی درجات آزاد روسازه و تکیه گاه های پل ها

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ss} & \mathbf{M}_{sg} \\ \mathbf{M}_{sg} & \mathbf{M}_{gg} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_s^t \\ \ddot{\mathbf{u}}_g \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{ss} & \mathbf{C}_{sg} \\ \mathbf{C}_{sg} & \mathbf{C}_{gg} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_s^t \\ \dot{\mathbf{u}}_g \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ss} & \mathbf{k}_{sg} \\ \mathbf{k}_{sg} & \mathbf{k}_{gg} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_s^t \\ \mathbf{u}_g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{P}_g(t) \end{Bmatrix} \quad (5)$$

در رابطه (۵)، بردارهای  $\mathbf{u}_s^t, \mathbf{P}_g(t)$ ، که به ترتیب عبارتند از جابجایی نقاط روسازه و نیروهای تکیه گاهی، مجهولات مساله هستند. همانطور که در رابطه (۵) مشاهده می شود، این معادله دارای فرم کلی معادله حاکم بر حرکت در حالت خطی است که با توجه به در نظر گرفتن همه درجات آزاد،  $\mathbf{u}$  و مشتقات آن، در رابطه (۵)، بر حسب مقادیر کلی ذکر شده اند. ضمناً همانطور که در رابطه (۵) مشخص است، بردارهای مربوط به تغییر مکان ها به دو جزء که به ترتیب مربوط به تکیه گاه ها و درجات آزاد روسازه هستند، تقسیم شده اند.  $\mathbf{M}_{ss}, \mathbf{C}_{ss}$  و  $\mathbf{K}_{ss}$  به ترتیب ماتریس های جرم و سختی و میرایی درجات آزاد روسازه،  $\mathbf{M}_{gg}, \mathbf{C}_{gg}$  و  $\mathbf{K}_{gg}$  به ترتیب ماتریس جرم و سختی و میرایی تکیه گاهی، و  $\mathbf{M}_{sg}, \mathbf{C}_{sg}$  و  $\mathbf{K}_{sg}$  به معنی جرم، سختی و میرایی ارتباط دهنده درجات آزاد تکیه گاهی و درجات آزاد روسازه هستند. با جداسازی معادلات حاکم بر حرکت گره های تکیه گاهی و گره های روسازه در رابطه (۵)، در نظر گرفتن دسته اول، و انتقال ترم های بر حسب  $\mathbf{u}_g$  به سمت راست معادله، رابطه زیر بدست می آید (Ghobarah et al., 1996):

$$\mathbf{M}_{ss} \ddot{\mathbf{u}}_s^t + \mathbf{C}_{ss} \dot{\mathbf{u}}_s^t + \mathbf{K}_{ss} \mathbf{u}_s^t = -\mathbf{M}_{sg} \ddot{\mathbf{u}}_g - \mathbf{C}_{sg} \dot{\mathbf{u}}_g - \mathbf{K}_{sg} \mathbf{u}_g \quad (6)$$

با توجه به عرف معمول استفاده از ماتریس های جرم متمرکز و فرض متعارف کوچک بودن اثر میرایی، رابطه ذیل:

$$\mathbf{M}_{sg} = \mathbf{C}_{sg} = \bar{0} \quad (7)$$

را می توان صحیح دانست و با جایگذاری آن در رابطه (۶) به رابطه ذیل رسید (Chopra 1995):

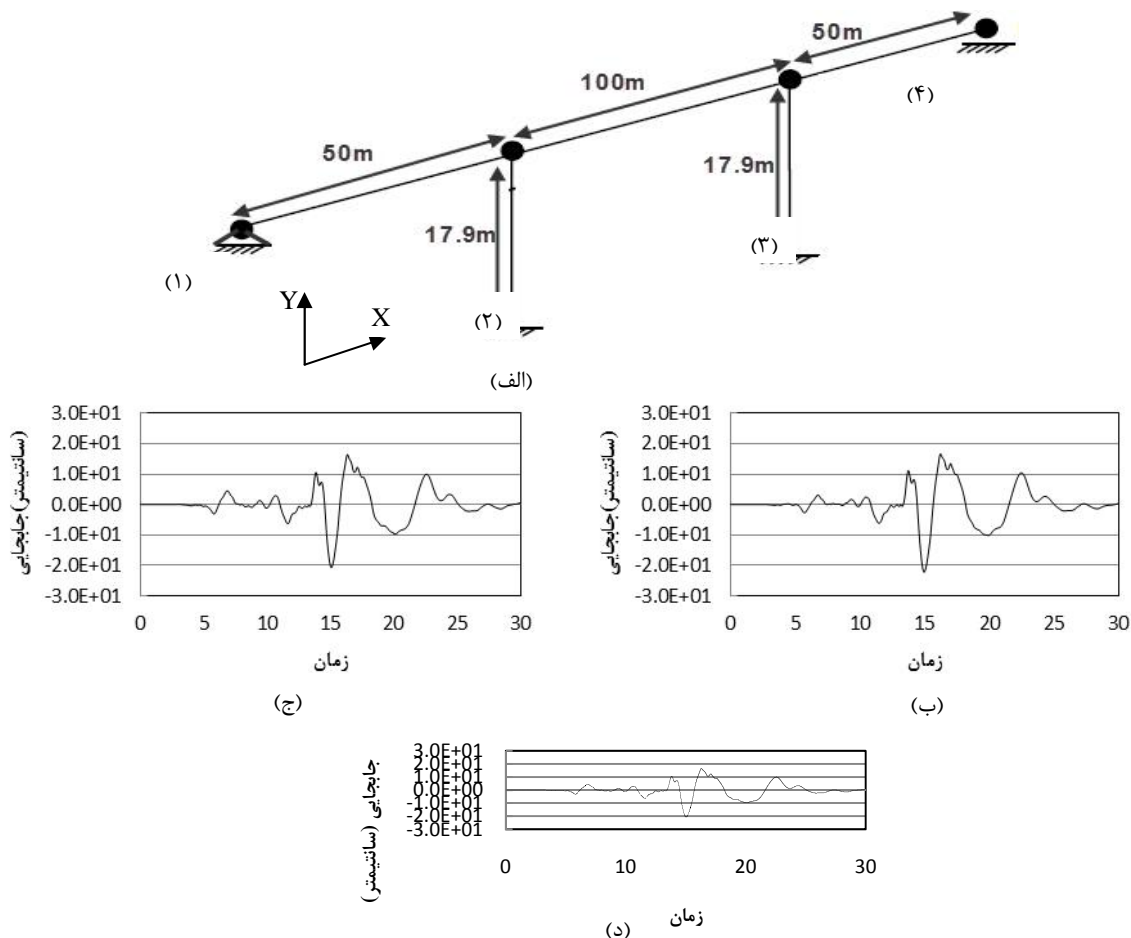
$$\mathbf{M}_{ss} \ddot{\mathbf{u}}_s^t + \mathbf{C}_{ss} \dot{\mathbf{u}}_s^t + \mathbf{K}_{ss} \mathbf{u}_s^t = -\mathbf{K}_{sg} \mathbf{u}_g \quad (8)$$

رابطه (۸) نشان دهنده نحوه استفاده از نگاهت جابجایی زمین در تحلیل حرکت ناهماهنگ تکیه گاه های مختلف است. با مقایسه رابطه (۸) و حالت کلی معادلات بیانگر رفتار دینامیکی در حالت خطی (حالت خطی رابطه (۱)) (Clough and Penzien, 1993) و (Chopra 1995)، اعمال تکنیک کاهش هزینه محاسباتی تحلیل لرزه ای مورد بحث در (Soroushian, 2008)، در مورد تحلیل حرکت ناهماهنگ پایه های پل ها کارآمد و موفق بنظر می رسد. مطالعه گزارش شده در بخش بعد شاهدهی بر این مدعی است.

## مطالعات عددی

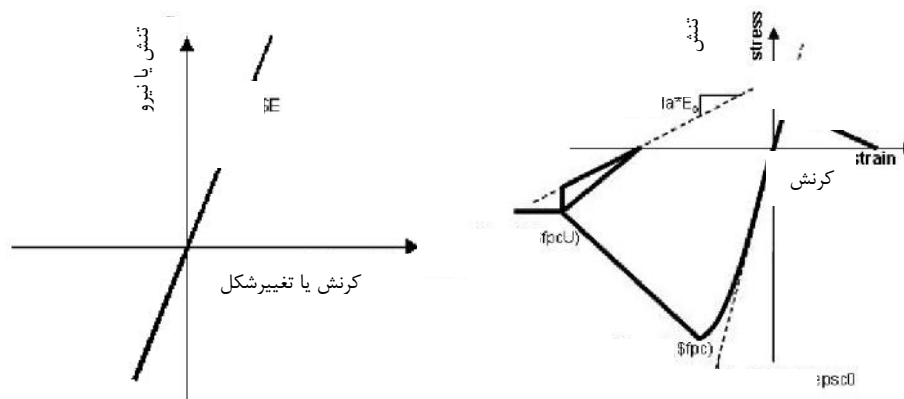
پل و نگاهت هایی از نوع جابجایی، از تحقیقی در حال انجام در مورد بررسی رفتار دینامیکی پل های دهانه بلند تحت تحریک چند تکیه گاهی (یثربی، ۱۳۹۳) انتخاب شده است. همانطور که در شکل (۲) مشخص است، پل انتخاب شده دارای سه دهانه به طول های ۵۰، ۱۰۰ و ۵۰

متر، و دو پایه بتنی دایره ای به طول ۱۷/۹ متر است. با توجه به رابطه (۸)، نگاشت‌ها انتخاب شده برای اعمال به تکیه گاه‌های مختلف پل از نوع جابجایی زمین بوده، تفاوت بین اطلاعات آنها، با توجه به فواصل تکیه گاه‌ها و سرعت موج برشی (۴۴۰ m/s) بدست آمده با همبستگی بالا به کار گرفته شده اند (یثربی، ۱۳۹۳). نگاشت‌ها و محل اعمال آنها در راستای طولی پل، در شکل (۲)، نشان داده شده اند. مدلسازی یک بار به صورت خطی و یک بار به صورت غیرخطی انجام شده است. در مدل‌ها برای مقاطع پایه‌ها و عرشه، از مقطع فایبر استفاده شده است. پایه‌ها، در حالت خطی، بصورت مصالح الاستیک (شکل (۳))، و در حالت غیرخطی، بصورت مصالح تعریف شده در شکل (۳) و (۴) در نظر گرفته شده اند. همچنین آرماتورهای عرشه با استفاده از تنش اولیه به صورت پیش تنیده در آمده و برای حالت غیرخطی به کار رفته اند (حالت خطی دارای پیش تنیدگی نیست). در جداول (۱) و (۲) جزئیات مصالح مورد استفاده ذکر شده است. برای تحلیل این پل، از نرم افزار OpenSees استفاده شده است؛ در تحلیل‌های غیرخطی مقدار رواداری نسبی جابجایی برابر با  $10^{-4}$  منظور شده است؛ و تکرارهای غیرخطی به روش نیوتن-رافسون اصلاح شده (Bathe, 1996) انجام شده اند.

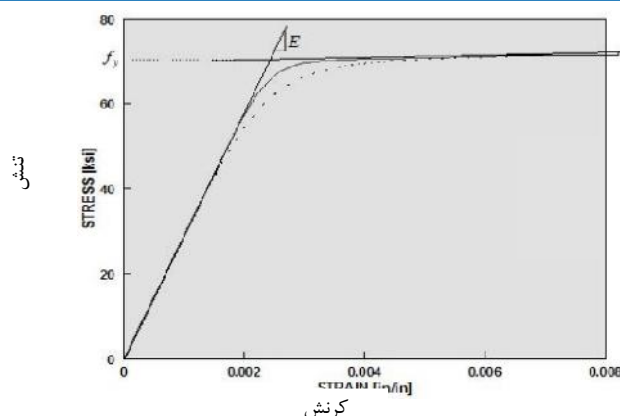


شکل ۲: پل و نگاشت‌های جابجایی انتخابی در جهت X (یثربی، ۱۳۹۳):

(الف) مدل شماتیک پل، (ب) نگاشت اعمال شده در گره ۱، (ج) نگاشت اعمال شده در گره ۲، (د) نگاشت اعمال شده در گره ۳



شکل ۳: منحنی رفتاری بتن نوع Concrete 02 (سمت راست) و مصالح الاستیک (سمت چپ) بصورت شماتیک (McKenna, 2011)



شکل ۴: منحنی رفتاری فولاد نوع Steel 02 بصورت شماتیک (McKenna, 2011)

جدول ۱: خواص مصالح بتنی مورد استفاده در پل مورد بررسی

مقاومت فشاری (MPa)	مقاومت نهایی (MPa)	مقاومت کششی (MPa)	مدول الاستیسیته فشاری (MPa)	مدول الاستیسیته کششی (MPa)	جرم حجمی (Kg/m <sup>3</sup> )	معیار
40	8/0	5/6	30200	2800	2400	بتن عرشه و ستون

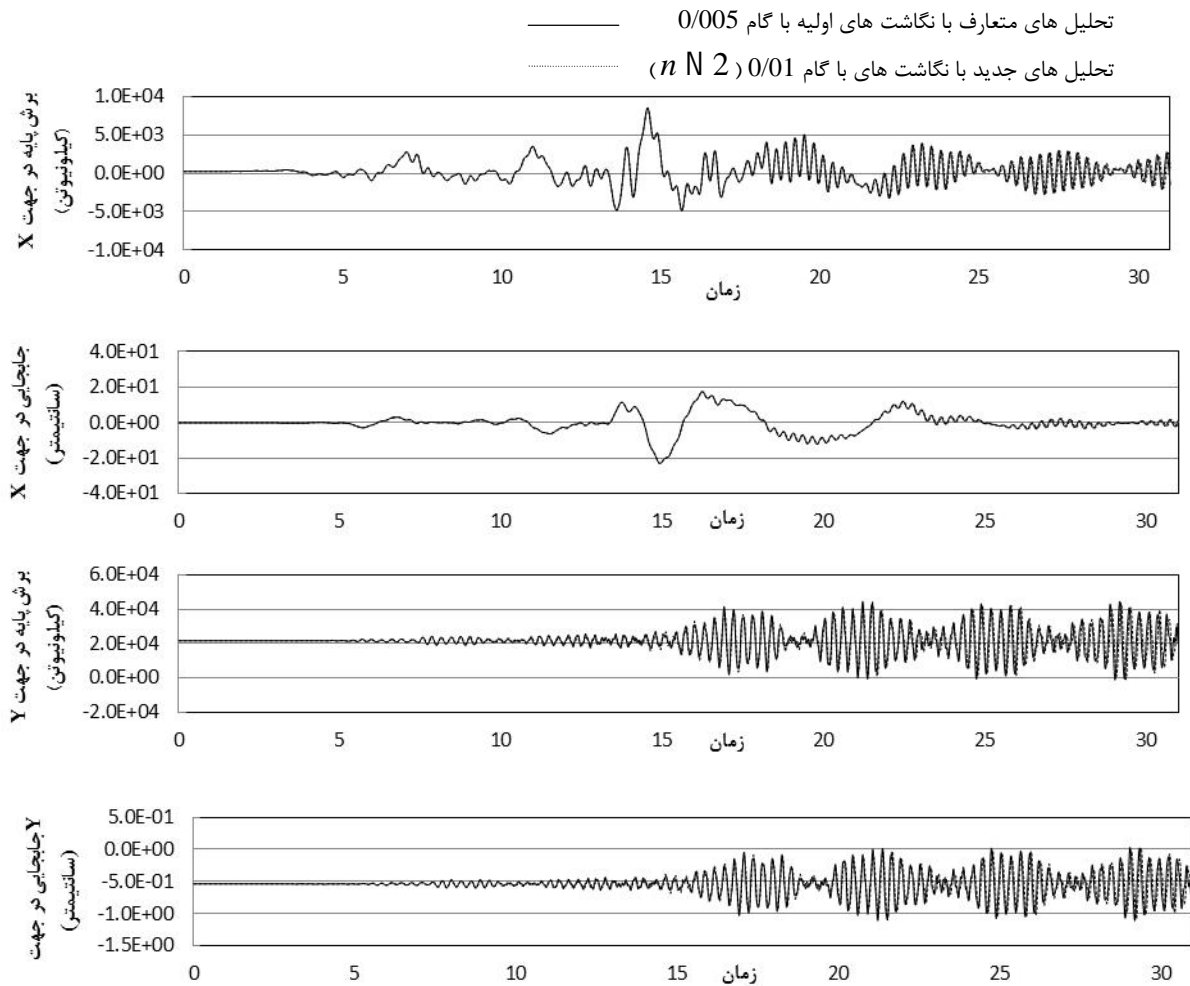
جدول ۲: خواص مصالح فولادی مورد استفاده در پل مورد بررسی

تنش جاری شدگی (MPa)	مدول الاستیسیته (MPa)	معیار
1709	200382/4	عرشه
420	210000	ستون

با مدلسازی و اعمال رکورد های متفاوت به تکیه گاه های پل، تحلیل ها (خطی و غیرخطی) یک بار در حالت متعارف و با گام زمانی بدست آمده از رابطه (۲)، و بار دیگر با تغییر نگاشت های جابجایی و براساس گام زمانی حاصل از رابطه (۳) انجام شده است؛ و در نهایت از ترم های اقلیدسی و بینهایت (Horn and Johnson, 1990)، جهت مقایسه پاسخ ها، استفاده شده، نتایج در جداول (۳) و (۴) گزارش شده اند. (در انجام تحلیل ها بارهای ثقلی مرده و زنده نیز لحاظ شده اند). مقادیر  $n=2$  مورد اشاره در جداول (۳) و (۴) براساس رابطه (۳)، با یک تحلیل اولیه، با گام زمانی  $\text{Min}(\frac{T_1}{10}, f \Delta t)$  (پریود مود اول سازه)، برای حالت خطی، و با گام زمانی  $\text{Min}(\frac{T_1}{100}, f \Delta t)$ ، برای حالت غیرخطی، و پیک شماری در تاریخچه زمانی پاسخ حاصله (امیری و همکاران، ۱۳۹۳) بدست آمده اند. همچنین، مقادیر  $n=1.5$  در جداول (۳) و (۴)، صرفاً، برای جامعیت بیشتر مطالعه عددی، در نظر گرفته شده اند، و در اعمال آنها، در تکنیک سال ۲۰۰۸، از توضیحات ارائه شده در (Sabzei et al., 2013) استفاده شده است. با توجه به مقادیر قابل توجه خطای متناظر با مقدار  $n=2$  در جداول (۳) و (۴)، برخی پاسخ های بدست آمده از تحلیل های متعارف و متناظر  $n=2$  در اشکال (۵) و (۶) رسم شده اند (پاسخ جابجایی در گره ۴ محاسبه شده است، و منظور از برش پایه نیروی تکیه گاهی در گره ۲ است). آشکارا، تفاوت های دو پاسخ از دیدگاه مهندسی زلزله و بخصوص تحلیل لرزه ای قابل اغماض هستند. نتیجه مقایسه تاریخچه زمانی پاسخ ها در جهت Y نیز از نظر مفهومی شبیه تاریخچه زمانی پاسخ ها در جهت X است، که با توجه به محدودیت تعداد صفحات این مقاله، ارائه نشده است. در توجیه مقادیر خطای بزرگ درج شده در جداول (۳) و (۴) (بخصوص در جدول (۳))، در حالیکه اشکال (۵) و (۶) مؤید قابل اغماض بودن خطاهاست، توجه به چند نکته لازم است. اول آنکه ترم  $L_{\infty}$  اصولاً منجر به مقادیر قابل توجه خطا می شود (به مقادیر مندرج در جداول (۳) و (۴) توجه شود). ثانیاً، خطاهای غیر قابل تشخیص در منحنی تاریخچه زمانی می توانند متناظر خطاهای عددی حدود ۱۰-۱۲ درصد باشند (Soroshian et al., 2011)، و نهایتاً اینکه، ترم ها معیار هایی صرفاً ریاضی برای خطا هستند، که منجر به خطاهای قابل توجه در حالت های کاملاً قابل قبولی مانند نمونه نشان داده شده در شکل (۷) می شود.

جدول ۳: درصد خطای حاصل از اعمال تکنیک (Soroshian, 2008) در تحلیل پل مورد بررسی بر حسب ترم بینهایت

تحلیل غیر خطی		تحلیل خطی		تحلیل غیر خطی		تحلیل خطی		پاسخ
جهت Y n=2	جهت Y n=1/5	جهت Y n=2	جهت Y n=1/5	جهت X n=2	جهت X n=1/5	جهت X n=2	جهت X n=1/5	
31/65	19/95	43/3	22/1	14/04	9/56	25/8	12/15	برش پایه
30/17	18/81	43/2	22/01	3/78	2/15	7/67	3/61	جابجایی



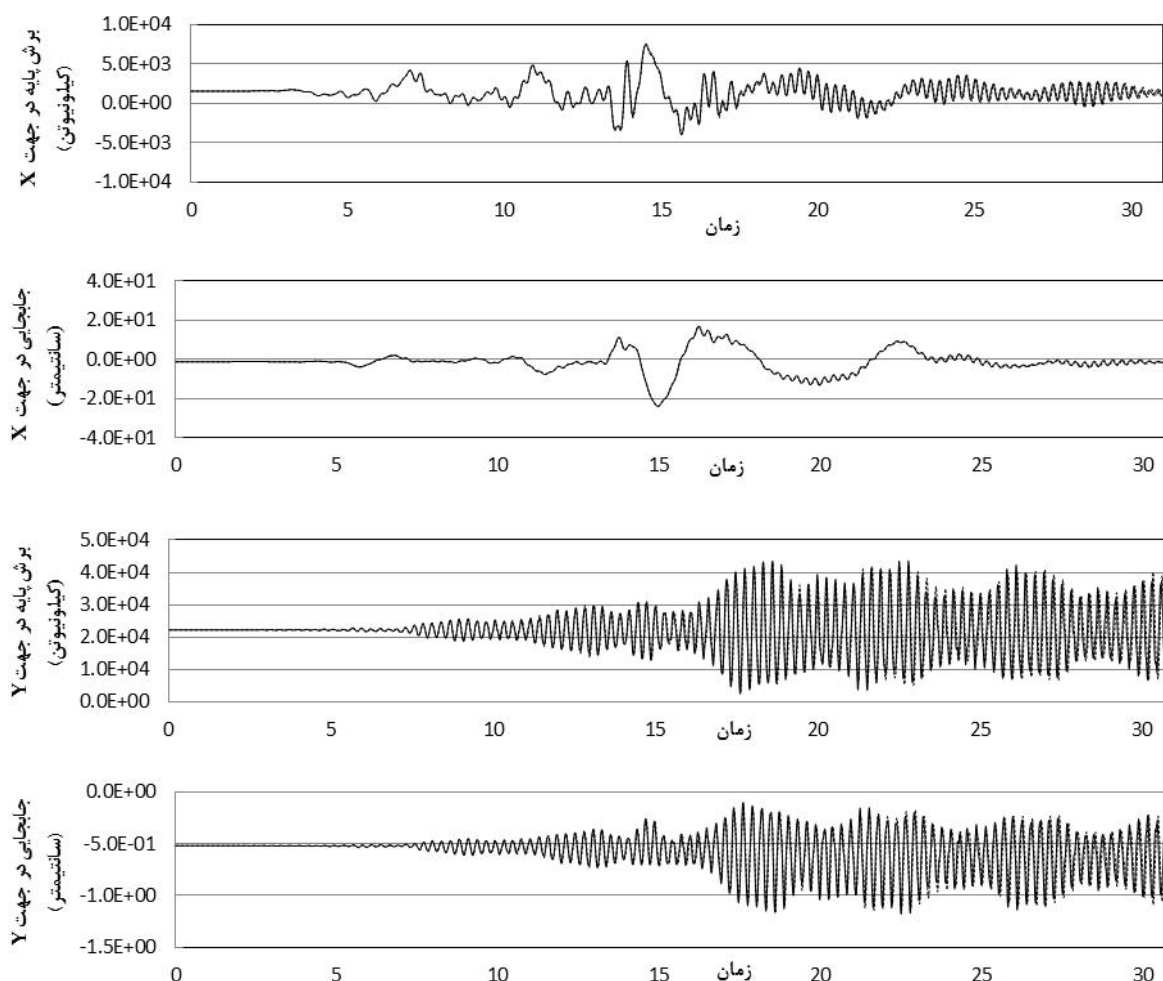
شکل

شکل ۵: تاریخچه زمانی برش پایه گره ۲ و جابجایی گره ۴ حاصل از تحلیل خطی سیستم سازه ای معرفی شده در اشکال (۲) - (۴)

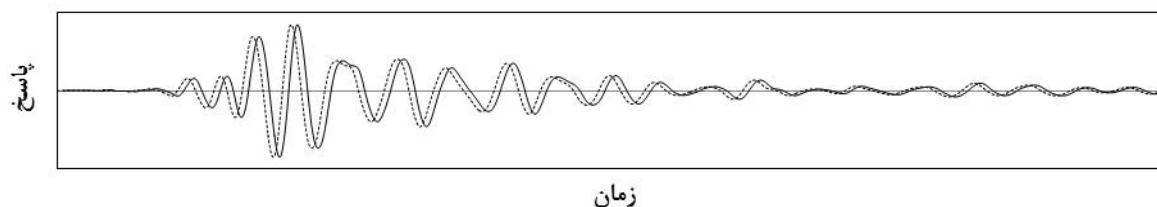
جدول ۴: درصد خطای حاصل از اعمال تکنیک (Soroushian, 2008) در تحلیل پل مورد بررسی بر حسب نرم اقلیدسی

تحلیل خطی		تحلیل غیر خطی		تحلیل خطی		تحلیل غیر خطی		پاسخ
جهت X n=1/5	جهت X n=2	جهت X n=1/5	جهت X n=2	جهت Y n=1/5	جهت Y n=2	جهت Y n=1/5	جهت Y n=2	
12/48	28/43	7/64	13/26	9/96	18/25	8/7	14/54	برش پایه
2/98	6/79	2/3	4/03	9/96	18/24	8/57	14/35	جابجایی

تحلیل های متعارف با نگاشت های اولیه با گام 0/005  
 ..... تحلیل های جدید با نگاشت های با گام 0/01 (n N 2)



شکل ۶: تاریخچه زمانی برش پایه گره ۲ و جابجایی گره ۴ حاصل از تحلیل غیرخطی سیستم سازه ای معرفی شده در اشکال (۲)–(۴)



شکل ۷: نمونه ای از تفاوت های قابل توجه از نظر ترم و قابل صرفنظر از دیدگاه مهندسی زلزله

## نتیجه گیری

با توجه به مطالعه انجام شده و نتایج بدست آمده، روش کاهش هزینه محاسباتی تحلیل انتگرال گیری پیشنهاد شده در (Soroushian 2008) می تواند چه در حالت خطی و چه در حالت غیرخطی در کاهش هزینه و تسریع تحلیل پل های درگیر با حرکت متفاوت پایه ها موثر باشد. برای پل مورد بررسی میزان کاهش هزینه محاسباتی در تحلیل های خطی ۵۰٪ و در تحلیل های غیرخطی حدود ۴۰٪ است. با توجه به مشاهدات انجام شده، اعمال روش (Soroushian 2008) در پل های بزرگ و پیچیده، می تواند بسیار موثر باشد. لذا، انجام مطالعاتی تکمیلی با در نظر گرفتن حالت های مختلف هندسه، سیستم سازه ای و شرایط تکیه گاهی توصیه می گردد.

## مراجع

امیری س، بیانی ع و سروشیان آ (۱۳۹۳) بررسی کارایی یک پیشنهاد متعارف انتخاب اندازه گام زمانی در تحلیل تاریخچه زمانی ساختمان های میان مرتبه، هفتمین کنفرانس بین المللی زلزله شناسی و مهندسی زلزله، تهران، ایران



یشری ل. (۱۳۹۳) رفتارسنجی دینامیکی پل های دهانه بلند تحت تحریکات چند تکیه گاهی در حوزه نزدیک، رساله دکتری، پژوهشگاه بین المللی زلزله شناسی و مهندسی زلزله، تهران، ایران (در دست تهیه)

Argyris JH and Vaz LE and Wilam KJ (1977) Higher order methods for transient diffusion analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 12(2), 243-278, USA

Bathe K J (1996) *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall, USA

Beytschko T and Hughes TJR (1983) *Computational Methods for Transient Analysis*, Elsevier Science Publishers, USA

Chopra AK (1995) *Dynamics of Structures*, Prentice-Hall, USA

Chung J Hulbert GM (1994) A family of single-step Houbolt time integration algorithms for structural dynamics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 118(1-2), 1-11

Clough RW and Penzien J (1993) *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, Singapore

Ghobarah A, Aziz TS and El-Ahar M (1996) Response of transmission lines to multiple support excitation, *Engineering Structures*, 12, 936-946

Horn RA and Johnson C R (1990) *Matrix Analysis*, Cambridge university Press, England

McKenna F and Fenves G (2011) *The OpenSees command language manual*, Version 1.2, Pacific Earthquake Engineering Center, University of California, Berkeley, USA

Paultre P (2010) *Dynamics of Structures*, John Wiley & Sons, Inc, USA

Sabzei A, Reziakolaei A Y and Soroushian A (2013) On more versatility for an integration step size enlargement technique in time integration analysis, *Proceedings of the 4th ECCOMAS Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering (COMPDYN)*, Kos, Greece

Schafer M (2006) *Computational Engineering – Introduction to Numerical Methods.*, Springer-Verlag, USA

Soroushian A (2008) A technique for time integration with steps larger than the excitation steps, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 24(12), 2087-2111

Soroushian A, Hosseini M and Vasseghi A (2011) On the performance of a technique for more efficient time integration when applied to bridge structures seismic analysis, *Proceeding of the 3<sup>rd</sup> ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering (COMPDYN)*, Corfu, Greece

Yamamura N and Tanaka H (1990) Response analysis of flexible MDF system for multiple-support seismic excitations, *Earthquake Engineering Structure Dynamic structures*, 19(3), 345-357