

تحلیل استاتیکی و مقدار ویژه تیر اولر ترک خورده با استفاده از ابراالمان پیشنهادی حاوی یک ترک باز

محسن مهرجو

استادیار دانشگاه آزاد اسلامی واحد همدان، دانشکده مهندسی، گروه عمران، همدان، ایران
mehrjoo_moh@yahoo.com

کلید واژه‌ها: تحلیل استاتیکی، تحلیل مقدار ویژه، ابرالمان، تیر اولر برنولی ترک خورده

چکیده

در این مقاله یک روش برای آنالیز تیر اولر برنولی ترک خورده بر اساس ارائه یک ابرالمان جدید که حاوی یک ترک عرضی با عمق دلخواه و درمحل دلخواه می باشد ارائه می شود. در این ابرالمان اثر ترک با اصلاح ماتریس سختی معرفی می شود. مولفه های ماتریس سختی براساس مفهوم تیر مضاعف و تئوری بتی برای تیر اولر برنولی اثبات می شود. ابرالمان پیشنهادی برای مدلسازی و تحلیل سازه های تیری ترک خورده و بدست آوردن تغییر شکل آن تحت بار استاتیکی و همچنین آنالیز مقدار ویژه و بدست آوردن فرکانس های طبیعی آنها استفاده می شود. سپس برای چند مثال نتایج بدست آمده با نتایج ابرالمان محدود دو بعدی اعتبار سنجی می شود

مقدمه

ترک های موجود در اعضای سازه های دلایل متعددی دارند. برای مثال آنها می توانند ترک های ناشی از خستگی باشند که تحت بارهای بهره برداری اتفاق می افتند. ترک ها در سازه ها برای عملکرد مناسب سازه ها یک تهدید محسوب می شوند. مطالعات آزمایشگاهی و محاسباتی ثابت کرده است که وجود ترک ها به تغییرات خواص ارتعاشی این سازه ها منجر می شود (Cacciola et al, 2003, Dimarogonas, 1996 and Krawczuk et al, 2000). از آنجاییکه به علت وجود ترک ها سازه ها سختی اولیه خود را از دست می دهند پایش تغییرات این خواص در طول عمر آن یک روش غیر مخرب رایج برای ارزیابی شدت تغییرات و محاسبه عمر باقیمانده این سازه ها محسوب می شود. وقتی یک ترک در یک ابرالمان سازه ای ایجاد می شود باعث ایجاد یک تغییر موضعی در سختی آن می شود که خواص دینامیکی سازه را به مقدار قابل توجهی تحت تاثیر قرار می دهد و در نتیجه ایمنی آن را کاهش می دهد. بنابراین توسعه مدل های قابل اعتماد برای رفتار مکانیکی ابرالمان های ترک خورده مهم می باشد.

یک مدل دقیق از ترک و اطراف آن می تواند با یک مش بندی مناسب ابرالمان محدود بطور مناسب بدست بیاید. از دیدگاه محاسباتی روش ابرالمان محدود یک روش استاندارد برای شبیه سازی اینکه چگونه سازه های ترک خورده تحت بارهای خارجی رفتار می کنند ارائه می دهد. تکنیک های ابرالمان محدود متعددی برای مدلسازی ترک تحت بارهای اعمالی توصیه شده است. عمده این روش ها ترک را بصورت فیزیکی با جداسازی دو وجه ترک مدلسازی می کنند. اکثر اوقات استفاده از چنین روش هایی به مش بندی مجدد ناحیه ترک نیاز دارد. در نتیجه یک عیب عمده این روش ها این است که آنها به تلاش محاسباتی زیادی برای اینکه بطور دقیق تکنیکی تنش در نوک ترک مدلسازی شود نیاز دارند. به علاوه الگوریتم های گسترش ترک می تواند طاقت فرسا و از نظر محاسباتی زمان بر باشد. به هر حال این روش ها برای مسائل معکوس مناسب نیستند چرا که در آنها مدلی مورد نیاز است که اصلاح محل ترک و عمق ترک برای جستجوی محل ترک به راحتی امکان پذیر باشد.

برای بعضی کاربردها رفتار کلی سازه ترک خورده مورد علاقه ماست در حالی که رفتار مواد در مجاورت ترک مهم نیست و می تواند صرف نظر شود. مسائل معکوس نمونه ای از این مسائل هستند. در چنین مواردی نیاز هست که وجود ترک بدون مدلسازی ترک شبیه سازی شود. در این تحقیق ما چنین روشی را ارائه خواهیم کرد که در آن وجود ترک را در هر موقعیت دلخواه و عمق دلخواه از ابرالمان یک بعدی اعمال خواهد شد. توضیح مصور نکته یاد شده در شکل (۱) آورده شده است. در این روش وجود ترک با اصلاح ماتریس سختی معرفی می شود. این نوع ابرالمان می تواند در کاربرد های سازه ای برای محاسبه پاسخ سازه های ترک خورده تحت بارگذاری مورد استفاده قرار گیرد. دیگر امتیاز این روش این است که تعداد نامحدودی از ابرالمان های ترک خورده می تواند در مدل تعبیه گردد. همچنین مشکل تکنیکی تنش محلی به دلیل نوک ترک در آنالیز وجود نخواهد داشت.





المان ترک خورده (با یک ترک)

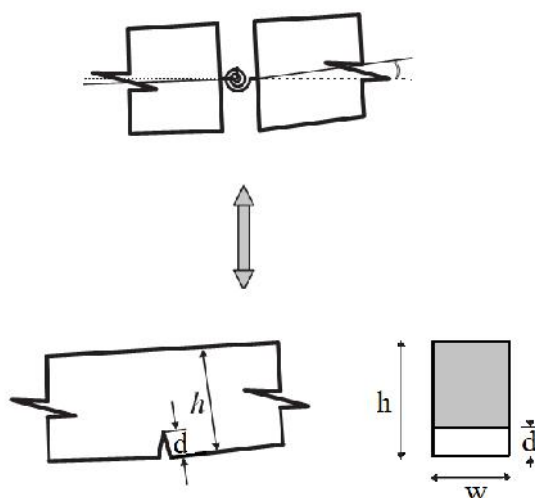
المان جدید با ماتریس سختی اصلاح شده

شکل ۱: توصیف مفهومی برای ابرالمان حاوی ترک: ترک از مدل فیزیکی حذف می شود و ماتریس سختی المان اصلاح می شود

ارائه ابرالمان حاوی یک ترک باز

سختی معادل یک ترک باز

ترک یک وجهی باز در مقاطع مستطیلی در شکل (۲) نشان داده شده است. این نوع ترک در حالت بارگذاری نوسانی تحت بارهای بهره‌برداري رخ می دهد. سختی فنر پیچشی معادل در محل ترک یک وجهی توسط (Ostachowicz and Krawczuk (1991) بصورت زیر معرفی شد:



شکل ۲: ترک یک وجهی

$$S = \frac{Ewh^2}{72f \times f(y)} \quad ()$$

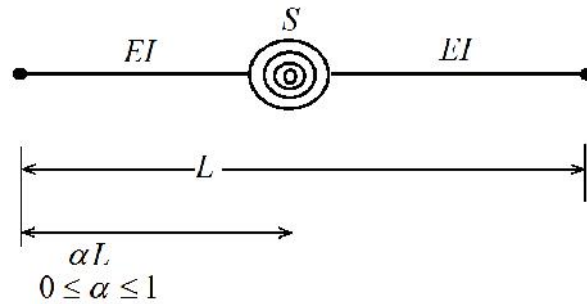
$$y = \frac{d}{h} \quad ()$$

$$f(y) = 0.6384(y)^2 - 1.035(y)^3 + 3.7201(y)^4 - 5.1773(y)^5 + 7.553(y)^6 - 7.332(y)^7 + 2.4909(y)^8 \quad ()$$

که در این رابطه d عمق ترک و w ضخامت تیر و h عمق تیر و E مدول الاستیسیته تیر می باشد.

استخراج ماتریس سختی ابرالمان

استخراج ابرالمان تیر اولر حاوی ترک بر اساس یک مدل ریاضی برای المان تیر با یک ترک عرضی مطابق با مدل ارائه شده توسط (Ostachowicz and Krawczuk (1991) می باشد. ترک به عنوان یک فنر پیچشی معرفی می شود که دو قسمت ترک نخورده تیر را به هم وصل می کند (شکل ۳) و با موقعیت آن (برای مثال به فاصله ΓL از انتهای چپ که $0 \leq \Gamma \leq 1$) و عمق آن d تعریف می شود و با سختی فنر پیچشی که با S نشان داده می شود مدل می شود که بستگی به w, d, h, E دارد.



شکل ۳: ابرالمان تیراوتر با یک ترک عرضی

ماتریس سختی رابطه بین عوامل نیرویی و جابجایی های متناظر آنها را ارائه می کند. ایده اصلی استخراج ماتریس سختی اصل سوپر پوزیشن است. با در نظر گرفتن جابجایی های عرضی و با صرف نظر از جابجایی های محوری درالمان تیر، المان دارای ۴ درجه آزادی خواهد بود. این به این معنی است که از دو درجه آزادی صرفنظر می شود. در نتیجه برای بدست آوردن همه ضرایب لازم ماتریس سختی باید ۴ درجه آزادی در نظر گرفته شود. درجات آزادی گرهی شامل جابجایی های عرضی ϵ_1 و ϵ_2 و چرخش ها θ_1 و θ_2 حول محور Z (عمود بر کاغذ). ما از تغییر شکل های برشی در این قسمت صرفنظر می کنیم اگر چه در نرم افزار های تجاری در نظر گرفته می شود. ماتریس سختی K می تواند ستون به ستون ساخته شود. برای بدست آوردن جملات هر ستون ما باید مساله تیر نامعین استاتیکی را حل کنیم. برای بدست آوردن جملات در یک ستون درجه آزادی المان متناظر با آن ستون به اندازه واحد جابجا می شود و درجات آزادی دیگر مقید می شوند نیرو ها و لنگر های گرهی که باید برای مقید کردن تغییر شکل اعمال شود بر طبق موقعیتش در ماتریس سختی K نامگذاری می شود. برای جابجایی ها و نیروها جهت های مثبت به سمت بالا هستند و برای چرخش ها و ممان ها جهت مثبت در جهت خلاف عقربه های ساعت می باشد. (شکل ۴) برای حل تیر نامعین از روش تیر مزدوج استفاده می شود. در تیرها و قابها روابطی که بین نیروهای برشی (V) و لنگر خمشی (M) و بار های گسترده (w) وجود دارد عبارتند از:

$$V = \int w dx \quad ()$$

$$M = \iint w dx \quad ()$$

همچنین روابط بین خیز (y) و شیب (θ) و صلبیت خمشی (EI) و لنگر خمشی (M) بصورت زیر می باشد:

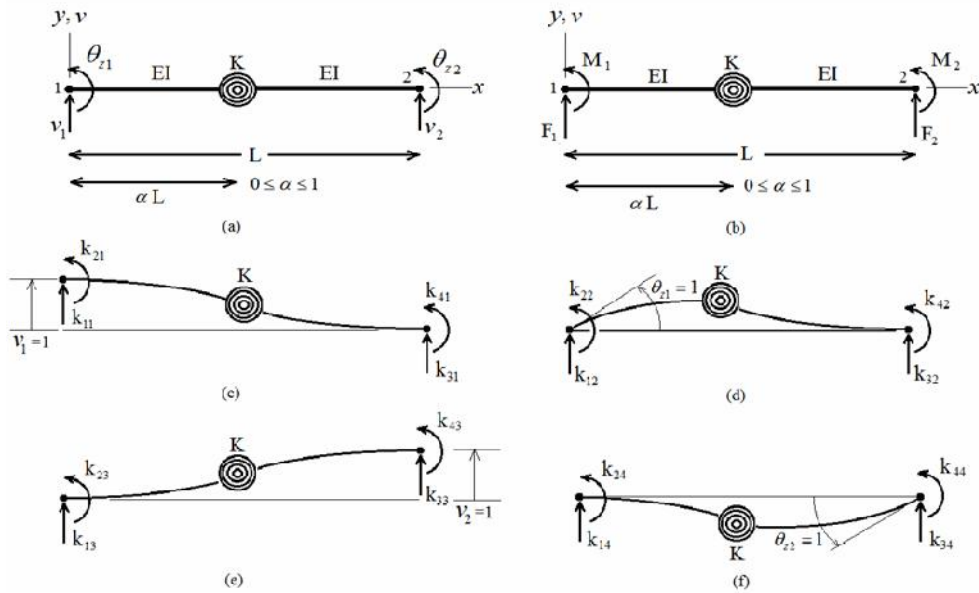
$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad ()$$

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \int \frac{M}{EI} dx \quad ()$$

$$y = \iint \frac{M}{EI} dx^2 \quad ()$$

اگر یک تیر فرضی در نظر بگیریم که شدت بار گسترده روی آن $\frac{M}{EI}$ باشد با مقایسه روابط (۴) و (۷) نیروی برشی در هر نقطه از تیر

فرضی برابر است با شیب در نقطه متناظر در تیر واقعی. همچنین با مقایسه روابط (۵) و (۸) لنگر خمشی در هر نقطه از تیر فرضی برابر است با خیز در نقطه متناظر در تیر واقعی.

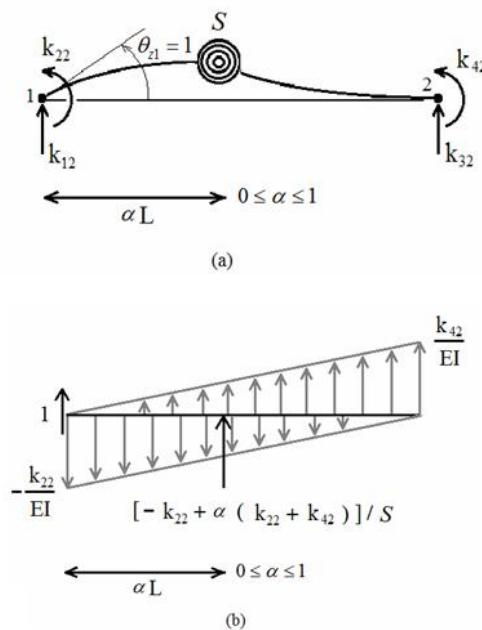


شکل ۴: (a) المان تیراوبلر با یک ترک با درجات آزادی مربوطه. (b) نیروهای گرهی متناظر با درجات آزادی. (c-f) تغییر شکل های متناظر با تحریک تک تک درجات آزادی. نیروهای گرهی بر طبق موقعیتشان در ماتریس سختی نامگذاری می شوند

استخراج ستون دوم ماتریس سختی

در قدم اول تکیه گاه سمت چپ به اندازه واحد در جهت درجه آزادی دوم دوران داده می شود و دیگر درجات آزادی مقید می شوند. در این حالت نیروها و لنگرها در درجات آزادی گرهی مطابق با ستون دوم ماتریس سختی می باشد. در این حالت تیر فرضی به صورت زیر می باشد (شکل ۵): برای بدست آوردن تیر فرضی بصورت زیر عمل می کنیم: در گره ۱ یک چرخش واحد در تیر واقعی وجود دارد بنابراین در تیر فرضی برش واحد وجود خواهد داشت و در محل فنر یک تغییر شیب ناگهانی در تیر واقعی وجود دارد، پس در تیر فرضی یک تغییر برش ناگهانی وجود دارد و در نتیجه یک نیروی متمرکز. مقدار نیروی متمرکز برابر است با تغییر شیب ناگهانی که برابر است با $(\frac{M}{S})$ که در آن M با استفاده از درونیایی

بدست می آید $([-k_{22} + \alpha(k_{22} + k_{42})]/S)$



شکل ۵: (a) تحریک درجه آزادی دوم به مقدار واحد. نیروهای گرهی متناظر با ستون دوم ماتریس سختی می باشند. (b) تیر مزدوج.

با نوشتن معادلات تعادل برای تیر فرضی خواهیم داشت:

$$\sum M_1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{k_{42}}{EI} L \times \frac{2}{3} L + \frac{[-k_{22} + r(k_{22} + k_{42})]}{S} \times rL - \frac{1}{2} \frac{k_{22}}{EI} L \times \frac{1}{3} L = 0$$

$$\Rightarrow k_{42} = \frac{6EI r(1-r) + SL}{2SL + 6EI r^2} k_{22} \Rightarrow A = \frac{6EI r(1-r) + SL}{2SL + 6EI r^2} \Rightarrow k_{42} = A k_{22}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 1 + \frac{1}{2} \frac{k_{42}}{EI} L + \frac{[-k_{22} + r(k_{22} + k_{42})]}{S} - \frac{1}{2} \frac{k_{22}}{EI} L = 0$$

$$k_{42} = A k_{22} \Rightarrow k_{22} \times \left[\frac{L}{2EI} (A-1) + \frac{r}{S} (1+A) - \frac{1}{S} \right] = -1$$

$$B = \left[\frac{L}{2EI} (A-1) + \frac{r}{S} (1+A) - \frac{1}{S} \right]$$

$$\Rightarrow k_{22} = -\frac{1}{B} \quad ()$$

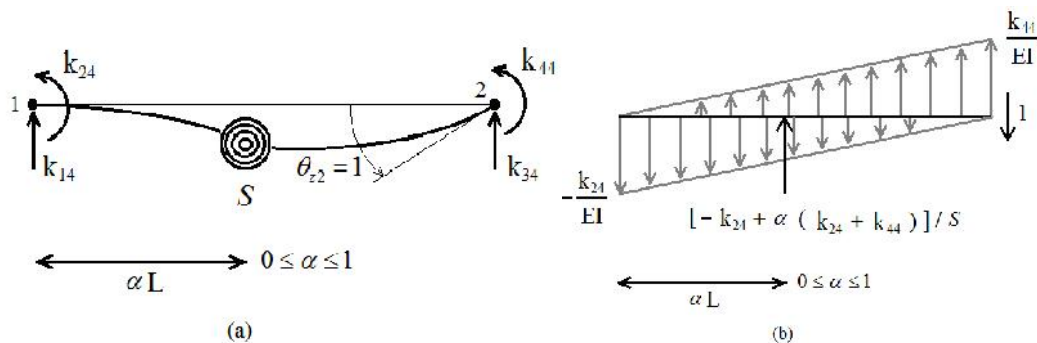
$$\Rightarrow k_{42} = -\frac{A}{B} \quad ()$$

$$\sum M_2 = 0 \Rightarrow k_{12} = \frac{k_{22} + k_{42}}{L} = \frac{-A-1}{BL} \quad ()$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow k_{32} = -k_{12} = \frac{A+1}{BL} \quad ()$$

استخراج ستون چهارم ماتریس سختی

در قدم دوم از استخراج ماتریس سختی تکیه گاه سمت راست به اندازه واحد در جهت درجه آزادی چهارم دوران داده می شود و دیگر درجات آزادی مقید می شوند (شکل ۶). در این حالت نیروها و لنگرها در درجات آزادی گرهی و همچنین تیر مزدوج متناظر با آن بصورت زیر می باشند:



شکل ۶: (a) تحریک رده آزادی چهارم به مقدار واحد. نیروهای گرهی متناظر با ستون چهارم ماتریس سختی می باشند. (b) تیر مزدوج.

با نوشتن معادله تعادل لنگر برای تیر مزدوج خواهیم داشت:

$$\sum M_2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{k_{44}}{EI} L \times \frac{1}{3} L + \frac{[-k_{24} + r(k_{24} + k_{44})]}{S} \times (1-r)L - \frac{1}{2} \frac{k_{24}}{EI} L \times \frac{2}{3} L = 0$$

$$\Rightarrow k_{44} = \frac{2SL + 6EI(1-r)^2}{SL + 6EI r(1-r)} k_{24} \Rightarrow C = \frac{2SL + 6EI(1-r)^2}{SL + 6EI r(1-r)} \Rightarrow k_{44} = C k_{24}$$

بنا به قانون بتی و ماکسول خواهیم داشت:

$$k_{24} = k_{42} = \frac{-A}{B} \quad ()$$

در نتیجه می توانیم نتیجه بگیریم:

$$k_{44} = Ck_{24} = Ck_{42} = \frac{-CA}{B} \quad ()$$

با نوشتن معادلات تعادل خواهیم داشت:

$$\sum M_2 = 0 \Rightarrow k_{14} = \frac{k_{24} + k_{44}}{L} = \frac{-A - AC}{BL} \quad ()$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow k_{34} = -k_{14} = \frac{A + AC}{BL} \quad ()$$

ستونهای اول و سوم ماتریس سختی با استفاده از قانون بتی (Wang, 1983) و معادلات تعادل به راحتی بدست می آیند. بعد از بدست آوردن همه ستون های ماتریس سختی ماتریس سختی ابرالمان حاوی ترک بصورت زیر خواهد بود:

$$k = \begin{bmatrix} \frac{-2A - CA - 1}{BL^2} & \frac{-A - 1}{BL} & \frac{2A + CA + 1}{BL^2} & \frac{-A - AC}{BL} \\ \frac{-A - 1}{BL} & \frac{-1}{B} & \frac{A + 1}{BL} & \frac{-A}{A + AC} \\ \frac{2A + CA + 1}{BL^2} & \frac{A + 1}{BL} & \frac{-2A - CA - 1}{BL^2} & \frac{B}{A + AC} \\ \frac{-A - AC}{BL} & \frac{-A}{B} & \frac{A + AC}{BL} & \frac{-CA}{B} \end{bmatrix} \quad ()$$

$$A = \frac{6EI\tau(1-\tau) + SL}{2SL + 6EI\tau^2} \quad ()$$

$$B = \left[\frac{L}{2EI}(A-1) + \frac{\tau}{S}(1+A) - \frac{1}{S} \right] \quad ()$$

$$C = \frac{2SL + 6EI(1-\tau)^2}{SL + 6EI\tau(1-\tau)} \quad ()$$

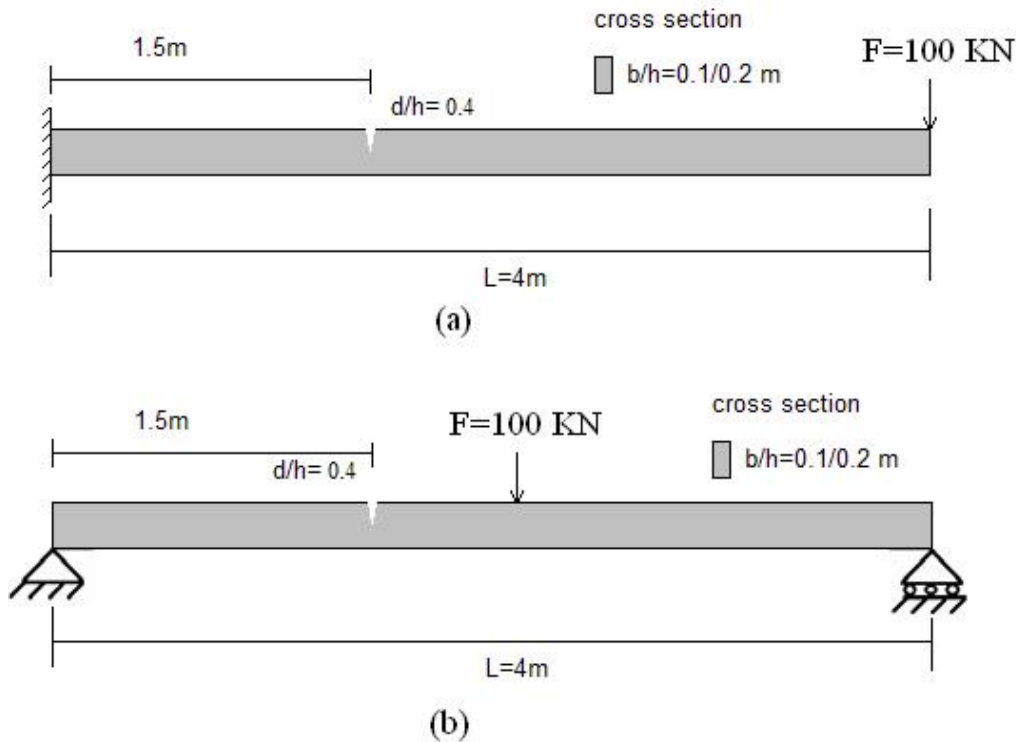
ماتریس جرم ابرالمان حاوی ترک

از آنجاییکه خرابی بصورت ترک جرم سازه را تحت تاثیر قرار نمی دهد بنابراین در آنالیز دینامیکی سازه های ترک خورده ، ماتریس جرم المان سالم می تواند بطور مناسب مورد استفاده قرار گیرد (Krawczuk et al, 2000).

اعتبار سنجی ابرالمان پیشنهادی با نتایج مدل المان محدود دو بعدی

ابرالمان تیراولر حاوی یک ترک با استفاده از دو مثال با شرایط مختلف از نظر شرایط مرزی و بارگذاری اعتبار سنجی شده است. نتایج مدل المان محدود دو بعدی شامل نتایج تحلیل استاتیکی و مقدار ویژه برای تایید درستی المان ارائه شده استفاده شده است. هر دو تیر های ترک

خورده از مواد با مشخصات زیر تشکیل شده اند: مدول الاستیسیته آنها ۲۰۰ مگاپاسکال، جرم مخصوص آنها ۷۸۰۰ کیلوگرم بر متر مکعب و ضریب پواسون آنها ۰.۳ می باشد. مشخصات هندسی آنها بدین شرح است: طول تیر ۴ متر و سطح مقطع تیر مستطیل با عمق ۰.۲ متر و عرض ۰.۱ متری باشد. یک ترک عرضی با عمق ۸۰ میلی متر در فاصله ۱.۵ متر از تکیه گاه در نظر گرفته شده است (شکل ۷).



شکل ۷: شرایط بارگذاری و شرایط مرزی مثال های ارائه شده برای آنالیز استاتیکی و مقدار ویژه تیر ترک خورده

تست همگرایی مدل های المان محدود

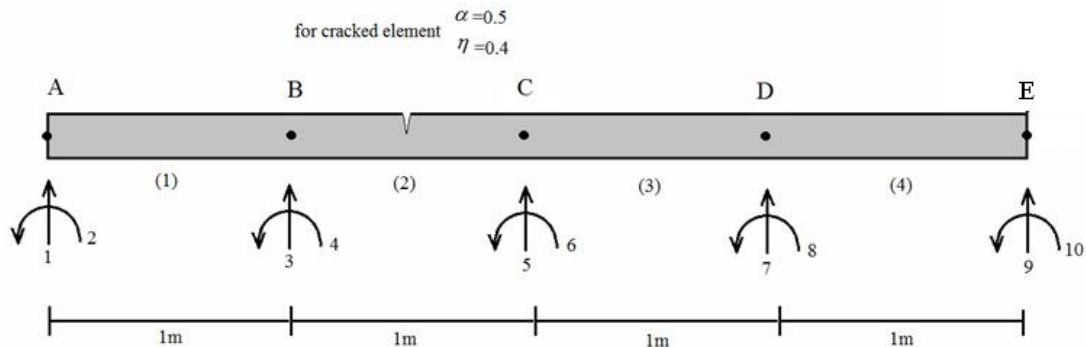
استفاده کورکورانه از مدل المان محدود برای حل مساله مقدار ویژه برای یافتن فرکانس های طبیعی بدون در نظر گرفتن فرضیات اتخاذ شده برای مدل ترک ممکن است به خطای قابل توجهی منجر شود. برای مدل المان محدود دو بعدی تحقیق حاضر تیر با المان های تنش مسطح ایزوپارامتریک چهار گرهی مش بندی شد. در هر مثال تراکم مش با تست همگرایی برای تیر های ترک خورده و نخورده آزموده شد. نتایج تست همگرایی (Zienkiewicz and Taylor, 2000) اندازه مناسب و کافی را برای مش ها تعیین کرد طوری که فرکانس های طبیعی تقریباً با فرکانس های دقیق قابل دسترس برای تیر های ترک نخورده (Timoshenko et al, 1974) یکسان باشد. در نتیجه در بخش های بعدی مناسب ترین مش های المان محدود بر اساس نتایج تست همگرایی مربوطه در هر مثال تعیین شده است. برای این مثال ها مدل المان محدود دو بعدی شامل حدود ۸۰۰۰ المان چهارضلعی چهار گرهی و مدل المان محدود جدید شامل چهار ابر المان تیر اولر پیشنهادی می باشد.

آنالیز استاتیکی

در این قسمت با آنالیز استاتیکی دو شرایط بارگذاری و شرایط مرزی مختلف ارائه شده ابر المان پیشنهادی اعتبار سنجی شده است. در مثال اول یک تیر طره در نظر گرفته شده است (شکل ۷) تیر تحت بار متمرکز ۱۰۰ کیلو نیوتن در انتهای تیر می باشد و در مثال دوم یک تیر ساده با بار متمرکز ۱۰۰ کیلو نیوتن در وسط دهانه مورد مطالعه قرار می گیرد (شکل ۷). هر دو مثال ارائه شده با چهار ابر المان با طول یک متر مدل می شود (شکل ۸). قابل ذکر است برای المانهای فاقد ترک از عمق نسبی نزدیک به صفر استفاده می شود. بعد از تشکیل ماتریس سختی برای چهار المان آنها را اسمبل کرده تا ماتریس سختی کل تیر بدست آید. و سپس با رابطه زیر جابجایی و دوران برای نقاط گرهی بدست می آید:

$$D = K^{-1} \times F \quad (21)$$

که D بردار جابجایی و K ماتریس سختی و F بردار بار می باشد جابجایی های عرضی و دوران ها در نقاط A, B, C, D, E و با استفاده از روش ارائه شده بدست می آید. جدول (۱) مقایسه بین نتایج دو روش را نشان می دهد. همانطور که از جدول مشخص است نتایج دو روش مطابقت خوبی دارند.



شکل ۸: تیر ترک خورده مدل شده با چهار ابر المان

آنالیز مقدار ویژه

در این قسمت با آنالیز مقدار ویژه دو شرایط بارگذاری و شرایط مرزی ارائه شده ابر المان پیشنهادی اعتبار سنجی شده است. آنالیز مقدار ویژه با استفاده از معادله زیر برای بدست آوردن فرکانس های طبیعی برای سه مود اول انجام می گردد.

$$|K - \bar{S}^2 M| = 0 \quad (22)$$

که در آن K ماتریس سختی و M ماتریس جرم و S فرکانس طبیعی می باشد. همچنین مشبندی مشابه بخش قبل در مدلسازی با المان محدود دو بعدی برای محاسبه فرکانس های طبیعی برای سه مود اول استفاده می شود و نتایج دو روش طبق جدول (۲) مقایسه می گردند. همانطور که از جدول مشخص است نتایج دو روش از تطابق خوبی برخوردار است.

جدول ۱: مقایسه جابجایی ها و چرخش ها برای نقاط مشخص شده در تیر ترک خورده

شرایط مرزی	تعداد المان ها/توجه المان	نقطه A		نقطه B		نقطه C		نقطه D		نقطه E	
		$u(m)$	$\theta(rad)$	$u(m)$	$\theta(rad)$	$u(m)$	$\theta(rad)$	$u(m)$	$\theta(rad)$	$u(m)$	$\theta(rad)$
تیر طره	8000 المان چهارضلعی	0.00	0.00	0.0138	0.0262	0.0541	0.0531	0.1135	0.0643	0.1804	0.0680
	4 المان ترک خورده جدید	0.00	0.00	0.0138	0.0262	0.0534	0.0519	0.1117	0.0632	0.1774	0.0669
تیر ساده	8000 المان چهارضلعی	0.00	0.0090	0.0084	0.0071	0.0119	0.0009	0.0078	0.0065	0.00	0.0084
	4 المان ترک خورده جدید	0.00	0.0088	0.0082	0.0069	0.0116	0.0008	0.0077	0.0064	0.00	0.0083

جدول ۲: مقایسه فرکانس های طبیعی بدست آمده از ابرالمان پیشنهادی (هرتز) و المان محدود دوبعدی

شرایط مرزی	نوع المان	مود		
		اول	دوم	سوم
تیر طره	المان چهار ضلعی	9.71	60.08	165.67
	المان تیر ترک خورده	9.78	61.58	174.97
تیر ساده	المان چهار ضلعی	26.29	108.11	244.81
	المان تیر ترک خورده	26.75	111.64	261.19

نتیجه گیری

در این تحقیق یک ابر المان حاوی ترک برای تحلیل استاتیکی و مقدار ویژه تیر اولر برنولی ارائه شد. در این ابر المان اثر ترک با اصلاح ماتریس سختی معرفی می شود. مولفه های ماتریس سختی براساس مفهوم تیر مزدوج و تئوری بتی برای تیر اولر اثبات می شود. ابر المان پیشنهادی برای مدلسازی سازه های تیری ترک خورده و بدست آوردن تغییر شکل های آنها تحت بار های استاتیکی و محاسبه فرکانس های طبیعی با دانستن مشخصات ترک ها استفاده می شود. سپس برای چند مثال نتایج بدست آمده با نتایج المان محدود دو بعدی اعتبارسنجی شد. اولین محدودیت المان پیشنهادی این است که توزیع تنش را در مجاورت ترک با این روش نمی توانیم بدست آوریم. بنابراین وقتی که اطلاعات تنش ضروری است این روش قابل استفاده نیست. محدودیت دوم این روش این است که که برا ترک های باز قبل قبول است و برای ترک های بسته قابل قبول نیست.

مراجع

- Cacciola P, Impollonia N and Muscolino G (2003) Crack detection and location in a damaged beam vibrating under white noise, *Computer & Structures*, 81:1773–82
- Dimarogonas AD (1996) Vibration of cracked structures: a state of the art review, *Engineering Fracture Mechanics*, 55: 831–57.
- Krawczuk M, Zak A. and Ostachowicz W (2000) Elastic beam finite element with a transverse elasto-plastic crack, *Finite Elements in Analysis and Design*, 34: 61–73
- Ostachowicz WM and Krawczuk M (1991) Analysis of the effect of cracks on the natural frequencies of a cantilever beam, *Journal of Sound and Vibration*, 150 (2): 191–201
- Owolabi GM, Swanidas ASJ and Seshadri R (2003) Crack detection in beams using changes in frequencies and amplitudes of frequency response function, *Journal of Sound and Vibration*, 265:1–22
- Timoshenko S, Young DH and Weaver W (1974) *Vibration problems in engineering*, New York, Wiley.
- Wang CK (1983) *Intermediate structural analysis*, Singapore: McGraw-Hill
- Zienkiewicz OC, Taylor RL (2000) *The finite element method*, Oxford: Butterworth and Heinmann

